
NOTES D'ÉTUDES

ET DE RECHERCHE

ANALYSE CONJONCTURELLE DE DONNÉES BRUTES

ET ESTIMATION DE CYCLES

PARTIE 2 : MISE EN ŒUVRE EMPIRIQUE

Renaud Lacroix

Avril 2008

NER - R # 210



**ANALYSE CONJONCTURELLE DE DONNÉES BRUTES
ET ESTIMATION DE CYCLES
PARTIE 2 : MISE EN ŒUVRE EMPIRIQUE**

Renaud Lacroix

Avril 2008

NER - R # 210

Les Notes d'Études et de Recherche reflètent les idées personnelles de leurs auteurs et n'expriment pas nécessairement la position de la Banque de France. Ce document est disponible sur le site internet de la Banque de France « www.banque-france.fr ».

Working Papers reflect the opinions of the authors and do not necessarily express the views of the Banque de France. This document is available on the Banque de France Website “www.banque-france.fr”.

Analyse conjoncturelle de données brutes et estimation de cycles

Partie 2 : mise en œuvre empirique

Renaud Lacroix*

Banque de France

Avril 2008

*Banque de France, 47-1416 DGEI-DESM-SICOS, 75049 Paris Cedex 01. E-mail : renaud.lacroix@banque-france.fr. Je remercie le rapporteur, J. Matheron (Banque de France, Direction de la Recherche) pour ses remarques, ainsi que E. Fonteny et R. Kierzenkowski (Banque de France) qui ont réalisé les estimations et simulations impliquant les logiciels SEATS et X12 interfacés dans le logiciel DEMETRA. .

Résumé :

On examine dans ce papier les propriétés de la méthode de décomposition d'une série temporelle fondée sur la méthodologie de Beveridge-Nelson et développée dans un papier joint (Lacroix (2008)). On présente notamment des outils utilisés dans le cadre de la mise en œuvre empirique de la méthode : traitement des effets calendaires, évaluation des révisions, lissage complémentaire de la composante transitoire de manière à mieux appréhender d'éventuelles régularités cycliques. Le déphasage entre la série désaisonnalisée et la série brute est évalué sur la base de simulations. Le volet empirique de l'étude traite de trois grands indicateurs macroéconomiques : le PIB US, l'indice de la production industrielle français, et la contribution française à l'agrégat monétaire M3 de la zone euro. Une comparaison de la décomposition de Beveridge-Nelson avec d'autres méthodes de filtrage indique que les résultats sont très dépendants de la méthode retenue. Toutefois, notre décomposition semble fournir des résultats interprétables selon une méthodologie transparente reposant sur un nombre limité de paramètres clairement identifiés.

Mots clés : décomposition de Beveridge Nelson, racines unitaires saisonnières, désaisonnalisation, cycle.

Abstract :

This paper investigates the properties of the decomposition of a time series presented in a companion paper (Lacroix, (2008)). The procedure relies upon an extension of Beveridge-Nelson methodology. We focus on its empirical implementation and show the need for additional steps in order to clarify the interpretation of the transitory component. Calendar effects are included in the modelization through a slight extension of the methodology while backward filtering of the cycle provides a smoother picture of its dynamic. In addition, special attention is paid to two drawbacks of any filtering method : revisions of the estimates and desynchronization between the raw series and the seasonal adjusted series. We provide an assessment of these effects through a small simulation experiment. The empirical analysis is devoted to three key indicators, the US GNP, the French IPI and the french contribution to M3 monetary aggregate for the euro zone. A limited comparison with alternative filtering methods shows that the results depend heavily on the method chosen for the decomposition. However, the Beveridge-Nelson decomposition displays nice properties and provides sensible and useful results without excessive expense, thanks to its transparent methodology.

Keywords : Beveridge Nelson decomposition, seasonal unit roots, seasonal adjustment, cycle.

JEL classifications : C14, C22, E32

Résumé non-technique :

Ce travail détaille la mise en œuvre de la méthode de décomposition d'une série temporelle présentée dans (Lacroix (2008)). La méthode repose sur une extension des décompositions de Beveridge-Nelson (BN), et permet d'extraire simultanément les composantes usuelles d'une série temporelle : tendance, cycle, composante saisonnière. La décomposition suppose une identification préalable précise de la dynamique non-stationnaire de la série, qu'elle soit de nature stochastique ou déterministe. La composante cyclique est obtenue comme le résidu stationnaire d'espérance nulle de la décomposition.

Plusieurs sujets connexes doivent être abordés dans la perspective d'une utilisation opérationnelle de cette méthode. Nous intégrons ainsi dans notre cadre d'analyse le traitement des effets calendaires, le suivi des révisions apportées aux composantes au fur et à mesure de leur réestimation, un lissage supplémentaire appliqué à la composante transitoire de façon à en faciliter l'interprétation, et enfin l'existence d'un déphasage entre la série filtrée et la série brute résultant du caractère asymétrique du filtre. Ce dernier point est traité par l'intermédiaire d'un exercice de Monte-Carlo au cours duquel une comparaison est effectuée avec le filtre d'extraction du signal proposé dans le logiciel SEATS. Il apparaît que la décomposition BN parvient généralement à identifier la présence du cycle figurant dans le modèle simulé au prix d'un léger déphasage, ce qui n'est pas toujours le cas de SEATS.

L'application empirique traite de trois séries macroéconomiques d'usage courant (le PIB US, l'indice de la production industrielle pour la France et la contribution française à l'agrégat monétaire M3 de la zone euro), et prolonge l'exercice de comparaison avec des filtres alternatifs (X12, SEATS, HP). On vérifie ainsi que la décomposition dépend largement de la méthode choisie, en particulier pour la composante cyclique, car celle-ci est la moins persistante. En outre, dans le cas de la méthode BN, l'approche semi-paramétrique semble préférable pour la modélisation de la dynamique stationnaire de la série brute dans la mesure où les erreurs de spécification d'un modèle paramétrique de type ARMA ont des répercussions significatives sur l'estimation des composantes.

Les résultats issus de la décomposition BN du PIB US permettent ainsi de retrouver les périodes de récession identifiées par le NBER, et fournissent une représentation interprétable de la dynamique des deux autres séries. Dans le cas de l'agrégat monétaire M3, un cycle est identifié, contrairement à la décomposition proposée par SEATS.

Non-technical summary :

This paper investigates the properties of the decomposition of a time series presented in a companion paper (Lacroix, (2008)). The procedure allows for the simultaneous estimation of the various components of a time series (trend, cycle, seasonal components) in a single framework. The main tool is provided by extended Beveridge Nelson (BN) decompositions, with a crucial preliminary identification of non-stationarities, both stochastic and deterministic, in the dynamic of the series. The cycle is defined as the stationary part of the decomposition and captures all transitory dynamics.

Several topics have to be addressed in order to implement our methodology for practical and recurrent use. The most significant are : calendar effects, which are included in our framework through a slight extension of the methodology, evaluation of revisions which stem from the continuous update of estimates, additional backward filtering of the cycle which provide a smoother picture of its dynamic. Lastly, special attention is paid to the possible desynchronization between raw and filtered series. This issue is examined through a Monte Carlo experiment and a limited comparison with results delivered by the SEATS software (signal extraction analysis). It turns out that while BN filters always identify the cyclical component included in the simulated model, this is not generally the case for SEATS estimates.

The empirical analysis is devoted to three key economic indicators : US GNP, French IPI and French contribution to M3 monetary aggregate for the euro zone. We pursue a comparison with alternative filtering methods commonly used for seasonal adjustment and trend-cycle analysis (X12, SEATS, HP). As expected, the shape of the decomposition is quite dependent on the method. However, BN estimates provide interpretable results for the three series under scrutiny. In particular, US recessions identified from the GNP's cyclical component match the NBER's chronology.

1 Introduction

Depuis une vingtaine d'années, les progrès de l'économétrie ont permis d'enrichir la boîte à outils des conjoncturistes de nouvelles aides à l'interprétation : correction des variations saisonnières et calendaires, filtrage, extraction de cycle, construction d'indicateurs avancés ou coïncidents à partir d'analyses factorielles ou de modèles markoviens. Tout cet arsenal vise à simplifier l'interprétation des variations de court-terme pour un public relativement large. Or, cet objectif n'est que partiellement atteint pour trois raisons essentielles. Tout d'abord, les résultats obtenus peuvent ne pas être suffisamment conclusifs, la grille de lecture proposée demeurant opaque. Ensuite les conclusions tirées de l'analyse sont toujours contingentes à la méthodologie mise en oeuvre, ce qui pose la question de la sensibilité des résultats aux diverses hypothèses et paramètres. Enfin, la multiplicité d'approches concurrentes peut entraîner des effets indésirables car l'absence d'arguments théoriques désignant "la" meilleure méthode conduit souvent à l'usage simultané d'outils concurrents. L'interprétation des discordances éventuelles est alors prudemment laissée au soin de l'utilisateur des chiffres.

À l'origine de ces difficultés se trouve souvent l'absence de transparence du processus conduisant de la série brute à l'indicateur final. L'exemple de la désaisonnalisation est à cet égard éclairant : la procédure Census-X12 définit un filtre théorique fixe, indépendant de la série traitée. Cette propriété a d'ailleurs été longtemps considérée comme un point fort de la méthode. Mais une fois pris en compte le traitement des points extrêmes et le paramétrage optionnel des moyennes mobiles en fonction de la volatilité des données, le filtre effectif de la procédure devient fortement non-linéaire (Ghysels *et alii* (1996)), de sorte qu'il est alors difficile de décrire de manière synthétique la séquence de transformations effectuées sur la série brute.

On propose dans ce travail une méthodologie susceptible de réduire les zones d'ombre dans ce type d'analyse, en s'appuyant sur la décomposition d'une série temporelle univariée proposée par Lacroix (2008). Dans le prolongement du travail séminal de Beveridge et Nelson (1981), le principe est de mettre l'accent sur l'identification la plus précise possible des composantes non-stationnaires de la variable brute, puis de définir le cycle comme la partie purement stationnaire (ou peu persistente) de la série. En particulier, aucune modélisation spécifique a priori du cycle n'est requise ici.

Nous abordons dans ce travail les propriétés de la décomposition, ainsi que les questions touchant à sa mise en oeuvre pratique. Plus précisément, l'interprétation des composantes dépend d'un ensemble de facteurs que l'on examine sur des exemples empiriques : robustesse des résultats au modèle estimé, prise en compte de l'incertitude sur les données brutes (existence de révisions), remplacement d'une moyenne mobile symétrique par une moyenne asymétrique pour l'estimation des composantes.

Le plan est le suivant : un rappel du cadre conceptuel et des éléments de la décomposition fait l'objet de la section 2. Les traitements complémentaires qui facilitent l'interprétation des résultats sont exposés section 3 au travers notamment du traitement des effets calendaires et d'une typologie des révisions. Un

bref exercice simulé (section 4) illustre la méthodologie proposée et notamment les propriétés en terme de déphasage. Enfin, trois applications empiriques sont exposées dans les sections 5 et suivantes, avec successivement: l'agrégat monétaire "contribution française à l'agrégat M3 zone euro" (incluant une comparaison avec d'autres méthodes), le PIB nominal US et l'indice de la production industrielle pour la France. Enfin, une annexe rassemble une présentation synthétique des outils d'analyse spectrale utilisés dans le papier.

2 Représentation de Beveridge-Nelson généralisée

La modélisation est présentée en détail dans un papier joint (Lacroix (2008)). On rappelle seulement dans cette section le cadre d'analyse, les hypothèses, ainsi que les propriétés des décompositions de Beveridge-Nelson qui seront utilisées dans les applications.

On suppose que la série traitée est modélisée par un processus aléatoire $y_t \in \mathbb{R}$ admettant la représentation suivante :

$$\varphi(\mathbf{B})(y_t - \xi_t) = d_t + u_t \text{ pour } t \geq 1 \quad (1)$$

avec (u_t) vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 1, u_t &= u_t^* \\ \forall t < 1, u_t &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$(u_t^*)_{t \in \mathbb{Z}}$ processus stationnaire, d'espérance nulle, strictement non-déterministe, admettant la représentation de Wold :

$$u_t^* = \Psi(\mathbf{B}) \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j} \quad (3)$$

où $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2 . Le fait que $\Psi(\mathbf{B})$ soit le développement de Wold entraîne la propriété bien connue :

$$\Psi(z) \neq 0 \text{ si } |z| < 1 \quad (4)$$

On suppose également :

$$\mathbf{H}_q : \sum_{k=0}^{\infty} k^q |a_k| < \infty \text{ pour } q \geq 2$$

Notons f_u la densité spectrale de (u_t^*) . Il résulte de \mathbf{H}_q que f_u est de classe C^q . Nous supposerons en outre:

$$\mathbf{H}_f : \inf f_u > 0$$

On note $\|X\|_2 = \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$ et $\text{sp}\{u_1, \dots, u_t\}$ l'espace engendré par les variables $(u_j)_{1 \leq j \leq t}$.

Ensuite,

$$\varphi(\mathbf{B}) = \prod_{\omega_j \in \Theta_1} [\Delta_{\omega_j}(\mathbf{B})]^{d_{\omega_j}}$$

et d_t décrit une superposition de signaux périodiques déterministes :

$$d_t = \sum_{\omega_j \in \Theta_2} [a_{1j} \cos(\omega_j t) + a_{2j} \sin(\omega_j t)]$$

avec $\Theta_1, \Theta_2 \subset \Theta$ et $\Theta = \{\omega_j\}_{1 \leq j \leq J} \subset [0, \pi]$ ensemble finie de fréquences. De plus, on suppose $\Theta_1 \cap \Theta_2 = \emptyset$ de manière à exclure la présence simultanée de racine unitaire et de tendance déterministe à une fréquence donnée. (a_{1j}) et (a_{2j}) sont des paramètres fixés. Par convention, $a_{2j} = 0$ si $\omega_j = 0$ ou π . On peut avoir $\Theta_2 = \emptyset$ auquel cas $d_t \equiv 0$. Les ensembles disjoints Θ_1 et Θ_2 seront décrits en extension :

$$\Theta_1 = \{\omega_1, \dots, \omega_r\}, \quad \Theta_2 = \{\omega_{r+1}, \dots, \omega_L\}$$

Typiquement, pour des données mensuelles, Θ comprend la fréquence tendancielle et les six fréquences saisonnières :

$$\Theta = \left\{ 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi \right\} \quad (5)$$

tandis que pour des données trimestrielles, seules deux fréquences saisonnières sont observables :

$$\Theta = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi \right\} \quad (6)$$

$\Delta_{\omega_j}(\mathbf{B})$ est l'opérateur de différentiation saisonnière :

$$\begin{aligned} \Delta_{\omega}(\mathbf{B}) &= 1 - 2 \cos \omega \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 \text{ si } \omega \in]0, \pi[\\ &= 1 - \cos \omega \mathbf{B} \text{ si } \omega = 0 \text{ ou } \pi \end{aligned}$$

On suppose également :

$$\mathbf{H}_{\omega} : \Psi(e^{i\omega_j}) \neq 0 \text{ pour } \omega_j \in \Theta_1 \quad (7)$$

Les paramètres d_{ω_j} décrivent les degrés d'intégration de (y_t) aux fréquences ω_j . Nous considérerons dans ce travail deux cas particuliers :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_d^1 : d_{\omega_j} &= 1 \text{ pour tout } \omega_j \in \Theta_1 \\ \mathbf{H}_d^2 : d_0 &\in \Theta_1, d_0 = 2, d_{\omega_j} = 1 \text{ pour tout } \omega_j \in \Theta_1 \setminus \{0\} \end{aligned}$$

ξ_t désigne un terme déterministe prenant en compte des effets déterministes identifiés dans la série y_t : effets calendaires, point aberrant, rupture de tendance, etc. Ces effets sont supposés être estimés dans une étape préalable et retirés de la série : on suppose donc $\xi_t = 0$.

Notons d le degré du polynôme $\varphi(\mathbf{B})$; si $\Theta_1^* = \Theta_1 \setminus \{0\}$:

$$d = 2 \times \text{card}(\Theta_1^*) + d_0 \times \text{card}(\Theta_1 \cap \{0\})$$

Le modèle (1) permet de définir y_t pour tout $t \geq 1$ en fonction de d_t et des $(u_k)_{1 \leq k \leq t}$ dès que l'on dispose du vecteur des d valeurs initiales $\mathbf{Y}_0 = (y_0, y_{-1}, \dots, y_{-d+1})'$. On suppose ces valeurs initiales fixées (non aléatoires).

Sous \mathbf{H}_d^1 , (y_t) est non-stationnaire, et intégré d'ordre 1 à toutes les fréquences. On notera en particulier que \mathbf{H}_{ω} assure que $\Delta_{\omega_j}(\mathbf{B})$ ne peut être factorisé dans $\Psi(\mathbf{B})$, et donc que ω_j est bien un pôle du (pseudo)-spectre de y_t .

Sous \mathbf{H}_d^2 , (y_t) est I(2) à la fréquence $\omega = 0$. Ces deux hypothèses couvrent l'ensemble des modèles classiques de non-stationnarité de type SARIMA utilisés dans les travaux empiriques utilisant des données macroéconomiques.

Pour simplifier l'écriture des développements qui suivent, on pose :

$$d_{j,t}[\underline{a}] = a_{1j} \cos(\omega_j t) + a_{2j} \sin(\omega_j t)$$

Lorsque les coefficients a_{1j} et a_{2j} sont remplacés par des variables aléatoires, soit A_1 , et $A_{2,j}$ dépendant seulement des conditions initiales \mathbf{Y}_0 de y_t , on notera le terme obtenu $d_{j,t}[\underline{\mathbf{A}}]$. Lorsque ces coefficients dépendent des valeurs initiales de l'innovation (ε_t) , c'est à dire de termes ε_k pour $k \leq 0$, on écrira $d_{j,t}[\underline{\mathbf{E}}]$. Les lettres minuscules dans l'argument de $d_{j,t}$ identifient donc un terme rigoureusement déterministe.

Il est avantageux d'écrire $d_{j,t}[\underline{a}]$ sous forme complexe:

$$d_{j,t}[\underline{c}] = c_{1j} e^{i\omega_j t} + c_{2j} e^{-i\omega_j t}, \quad c_{2,j} = \overline{c_{1,j}} \quad (8)$$

On introduit de même les trends déterministes saisonniers :

$$Td_{j,t}[\underline{c}] = c_{1j} t e^{i\omega_j t} + c_{2j} t e^{-i\omega_j t}, \quad c_{2,j} = \overline{c_{1,j}} \quad (9)$$

Pour figurer un terme de la forme d_t dans (1), c'est à dire une combinaison linéaire de variables $d_{j,t}$ on adopte la notation symbolique:

$$\sum_{k=1}^r d_{j_k,t}[\underline{a}] = [d_{j_1} | d_{j_2} | \dots | d_{j_r}] [\underline{\mathbf{a}}] \quad (10)$$

De même :

$$\sum_{k=1}^r Td_{j_k,t}[\underline{a}] = [Td_{j_1} | Td_{j_2} | \dots | Td_{j_r}] [\underline{\mathbf{a}}] \quad (11)$$

Enfin, il est commode d'écrire le modèle (1) pour tout $t \in \mathbb{Z}$: il suffit de poser:

$$\begin{cases} \forall t \leq -d : y_t = d_t = 0 \\ \forall t \leq 0 : \xi_t = 0 \\ \text{Pour } t = -d + 1, \dots, 0 : d_t = \varphi(\mathbf{B}) y_t \end{cases}$$

La décomposition recherchée de (y_t) est fondée sur l'opérateur "inverse" de la différentiation, l'opérateur d'intégration (Gregoir (1994)). Appliqué à $(y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, cet opérateur définit la série de terme d'indice $t \in \mathbb{Z}$ donnée par :

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_\omega \{y\}]_t &= \sum_{k=1}^t y_k \frac{\sin \omega[t+1-k]}{\sin \omega} \text{ si } \omega \in]0, \pi[\text{ et } t \geq 1 \\ &= \sum_{k=1}^t y_k e^{-i\omega[t-k]} \text{ si } \omega \in \{0, \pi\} \text{ et } t \geq 1 \\ &= -\sum_{k=t+1}^0 y_k \frac{\sin \omega[t+2-k]}{\sin \omega} \text{ si } \omega \in]0, \pi[\text{ et } t \leq -1 \\ &= -\sum_{k=t+1}^0 y_k e^{-i\omega[t+1-k]} \text{ si } \omega \in \{0, \pi\} \text{ et } t \leq -1 \\ &= 0 \text{ si } t = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

La décomposition de Beveridge-Nelson généralisée permet de représenter y_t comme une superposition de signaux périodiques déterministes, dont certains ont une amplitude fixée par les conditions initiales \mathbf{Y}_0 tandis que d'autres dépendent de paramètres inconnus, ainsi que de tendances stochastiques saisonnières "pures", chacune de ces tendances étant associée à une fréquence $\omega_j \in \Theta_1$ fixée.

- Modèle \mathbf{H}_d^1

$$y = [d_1|d_2|\dots|d_r] [\mathbf{A}] + [d_1|d_2|\dots|d_r|d_{r+1}|\dots|d_L] [\mathbf{a}] + \sum_{j=1}^r Z_{j,t} \quad (13)$$

avec $Z_{j,t}$ défini par :

$$\begin{cases} \Delta_{\omega_j}(\mathbf{B}) Z_{j,t} = a_j(\mathbf{B}) u_t \text{ pour } t \geq 1 \\ \text{et} \\ Z_{j,t} = 0 \text{ pour } t \leq 0 \end{cases} \quad (14)$$

$a_j(\mathbf{B})$ est un polynôme de degré au plus égal à 1.

- Modèle \mathbf{H}_d^2

$$\begin{aligned} y &= Td_1 [\mathbf{A}] + Td_1 [\mathbf{a}] \\ &+ [d_1|d_2|\dots|d_r] [\mathbf{A}] + [d_1|d_2|\dots|d_L] [\mathbf{a}] \\ &+ Z_{1,t}^1 + Z_{1,t}^2 + \sum_{j=2}^r Z_{j,t} \end{aligned} \quad (15)$$

avec $Z_{1,t}^1, Z_{1,t}^2$ définis selon:

$$\begin{cases} \Delta_{\omega_1}^2(\mathbf{B}) Z_{1,t}^1 = \mu_1 u_t \text{ pour } t \geq 1 \\ \text{et} \\ Z_{1,t}^1 = 0 \text{ pour } t \leq 0 \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \Delta_{\omega_1}(\mathbf{B}) Z_{1,t}^2 = \tilde{a}_1 u_t \text{ pour } t \geq 1 \\ \text{et} \\ Z_{1,t}^2 = 0 \text{ pour } t \leq 0 \end{cases} \quad (17)$$

et pour $j \geq 2$, $Z_{j,t}$ donné par :

$$\begin{cases} \Delta_{\omega_j}(\mathbf{B}) Z_{j,t} = \tilde{a}_j(\mathbf{B}) u_t \text{ pour } t \geq 1 \\ \text{et} \\ Z_{j,t} = 0 \text{ pour } t \leq 0 \end{cases} \quad (18)$$

Sous chacune des hypothèses \mathbf{H}_d , il suffit donc de connaître $a_j(\mathbf{B})$ (ou $\tilde{a}_j(\mathbf{B})$ et μ_1) pour déterminer $(Z_{j,t})_{t \geq 1}$ à partir de $(u_t)_{t \geq 1}$.

La décomposition (13) ou (15) peut être poursuivie de manière à faire apparaître la composante stationnaire de la série. Celle-ci recense les effets transitoires affectant la série, et dans certains cas, pourra être interprétée comme un cycle.

- Sous \mathbf{H}_d^1 :

$$\begin{cases} y = [d_1|d_2|\dots|d_r] [\mathbf{A}] + [d_1|d_2|\dots|d_r] [\mathbf{E}] + [d_1|d_2|\dots|d_L] [\mathbf{a}] \\ + \sum_{j=1}^r \mathbf{S}_{\omega_j} \{ \lambda_j(\mathbf{B}) a_j(\mathbf{B}) \varepsilon \} \\ + \Gamma(\mathbf{B}) \varepsilon \end{cases} \quad (19)$$

$\Gamma(\mathbf{B})$ est une moyenne mobile infinie, et $\lambda_j(\mathbf{B})$ un polynôme de degré au plus égal à un.

- Sous \mathbf{H}_d^2 :

$$\left[\begin{array}{l} y = [d_1] [\mathbf{A}] + [d_1] [\mathbf{E}] + [d_1] [\mathbf{a}] + Td_1 [\mathbf{A}] + Td_1 [\mathbf{E}] + Td_1 [\mathbf{a}] \\ + [d_2] \dots [d_r] [\mathbf{A}] + [d_2] \dots [d_L] [\mathbf{a}] \\ + \mathbf{S}_{\omega_1} \{ \eta_{1,1} \varepsilon \} + \mathbf{S}_{\omega_1}^2 \{ \eta_{1,2} \varepsilon \} \\ + \sum_{j=2}^r \mathbf{S}_{\omega_j} \{ \lambda_j (\mathbf{B}) \tilde{a}_j (\mathbf{B}) \varepsilon \} \\ + \Gamma (\mathbf{B}) \varepsilon \end{array} \right. \quad (20)$$

Les expressions (19) et (20) isolent, en fonction de leur variabilité, les trois composantes de la série y_t . Ainsi, sous \mathbf{H}_d^1 , on obtient:

- La composante déterministe modélisant le niveau moyen de la série. :

$$\begin{aligned} y_{1,t} &= [d_1|d_2] \dots [d_r] [\mathbf{A}] + [d_1|d_2] \dots [d_r] [\mathbf{E}] + [d_1|d_2] \dots [d_L] [\mathbf{a}] \\ &= \mathbb{E}(y_t | \mathbf{Y}_0, \varepsilon_k, k \leq 0) \end{aligned}$$

Le qualificatif déterministe désigne aussi bien le terme non stochastique (dépendant de \mathbf{a} et \mathbf{A}), que stochastique (terme dépendant de \mathbf{E}).

- La composante non-stationnaire pure, d'espérance nulle, décomposée sur chaque fréquence :

$$y_{2,t} = \sum_{j=1}^r \mathbf{S}_{\omega_j} \{ \lambda_j (\mathbf{B}) a_j (\mathbf{B}) \varepsilon \}_t$$

Chacune des composantes de $y_{2,t}$ est une marche aléatoire saisonnière construite à partir du processus MA(2) $\theta_t = \lambda_j (\mathbf{B}) a_j (\mathbf{B}) \varepsilon_t$ pour $\omega_j \notin \{0, \pi\}$, ou du bruit-blanc ε_t lorsque $\omega_j \in \{0, \pi\}$.

- La composante stationnaire :

$$y_{3,t} = \Gamma (\mathbf{B}) \varepsilon_t$$

On suppose maintenant que Θ est de la forme (5) ou (6) avec $0 = \omega_1 \in \Theta_1$.

On peut alors interpréter ce qui précède sous l'angle de la décomposition traditionnelle d'une série temporelle suivant les composantes usuelles. Par exemple, sous \mathbf{H}_d^1 :

- **Tendance** :

$$T_t = d_1 [\mathbf{A}] + d_1 [\mathbf{E}] + d_1 [\mathbf{a}] + \mathbf{S}_0 \{ (\lambda_{1,1} a_1) \varepsilon \}_t \quad (21)$$

La tendance stochastique non-déterministe de cette composante a pour innovation (ε_t) , à un facteur multiplicatif près.

- **Composante saisonnière** :

$$\begin{aligned} S_t &= [d_2] \dots [d_r] [\mathbf{A}] + [d_2] \dots [d_r] [\mathbf{E}] + [d_2] \dots [d_L] [\mathbf{a}] \\ &+ \sum_{j=2}^r \mathbf{S}_{\omega_j} \{ \lambda_j (\mathbf{B}) a_j (\mathbf{B}) \varepsilon \}_t \end{aligned} \quad (22)$$

On note que cette composante s'écrit directement comme l'agrégation des harmoniques associées aux fréquences saisonnières, et que même lorsque $\Theta_2 = \emptyset$, la saisonnalité inclut des termes déterministes dont les coefficients sont fonction des valeurs initiales \mathbf{Y}_0 du processus : ces valeurs initiales ont donc une influence forte sur le profil saisonnier de la série, notamment pour les premiers points. Par la suite, la composante stochastique non-stationnaire permet à ce profil d'évoluer avec le temps.

- **Composante transitoire :**

$$C_t = y_{3,t}$$

Les phénomènes irréguliers sont incorporés dans cette composante, que l'on nommera plus simplement "cycle". Le terme "cycle" signifie précisément "oscillations stationnaires", sans qu'il y ait a priori de régularités assimilables à un cycle dans y_3 .

L'estimation des différentes composantes de la décomposition suppose d'abord l'identification des racines unitaires figurant dans Θ_1 et Θ_2 : on utilise ici conjointement les tests proposés par Hylleberg et alii (1990), et Canova et Hansen (1995). Une fois les racines identifiées, la décomposition peut être obtenue selon deux approches. L'une est paramétrique, et suppose la modélisation de la composante stationnaire de la série brute, y_t , u_t sous forme ARMA. L'autre est semi-paramétrique : elle approxime la loi de u_t par un modèle auto-régressif dont l'ordre croît avec la taille de l'échantillon. Ces deux méthodes, dénommées dans la suite "BN paramétrique" et "BN semi-paramétrique" sont décrites en détail dans Lacroix (2008).

3 Interprétation des résultats

L'estimation des composantes théoriques de la série fournit un ensemble d'indicateurs bruts dont la lecture appelle un certain nombre de traitements complémentaires. Nous abordons maintenant ceux qui paraissent les plus importants pour une interprétation correcte des résultats.

3.1 Etudier les propriétés de C_t

Cette analyse peut être menée selon différentes approches. Nous privilégions ici l'analyse en fréquence de C_t , de manière à identifier la présence éventuelle d'une fréquence dominante dans la dynamique de la variable. Dans l'affirmative, on vérifiera si cette fréquence peut être associée à un cycle. Il suffit pour cela d'estimer la densité spectrale de (C_t) .

3.2 Calculer les corrélations entre composantes

Ces corrélations sont calculées sur les variables stationnaires obtenues après différentiation des différentes composantes. Contrairement aux décompositions usuelles, aucune structure particulière n'est imposé pour ces corrélations. Leur estimation peut être utile pour l'interprétation des composantes obtenues.

3.3 Comparer les résultats obtenus selon plusieurs approches

La modélisation semi-paramétrique n'introduit que des hypothèses minimales sur (u_t) . En ce sens, elle apparaît plus robuste que la modélisation paramétrique qui peut être sensible aux erreurs de spécification. Il est intéressant de vérifier si les résultats obtenus par les deux méthodes sont proches, en particulier en ce qui concerne la dynamique de (C_t) . On verra dans notre application que les résultats obtenus sont quelquefois divergents¹, et qu'il est nécessaire de pousser les investigations plus loin pour déterminer, du point de vue statistique, la "meilleure" estimation du cycle.

3.4 Calculer un indicateur interprétable du cycle

Lorsque (C_t) indique la présence d'une composante cyclique, il est intéressant de suivre son évolution au mois le mois. Malheureusement, les phénomènes irréguliers associés aux hautes fréquences rendent son interprétation délicate. Nous avons besoin ici d'une étape supplémentaire de lissage, effectuée dans l'esprit du filtre de Baxter-King.

Etant donné un seuil $\omega_* \in]0, \pi[$, considérons le filtre symétrique "passe-bas" :

$$g(e^{i\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k e^{ik\omega} = 1 \{|\omega| \leq \omega_*\}$$

Ce filtre symétrique élimine toutes les fréquences supérieures à ω_* de la série à laquelle il est appliqué. Les coefficients du filtre sont :

$$\begin{cases} g_k = \frac{\sin(\omega_* k)}{\pi k} & \text{si } k \neq 0 \\ g_0 = \frac{\omega_*}{\pi} \end{cases}$$

Nous proposons d'étudier alors :

$$C_t \{\omega_*\} \stackrel{\text{def}}{=} g(\mathbf{B}) C_t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k C_{t-k} \quad (23)$$

En pratique, on conservera tous les cycles d'une durée supérieure à 1 an, ce qui revient à fixer ω_* égal à la première fréquence saisonnière, soit $\omega_* = \pi/6$ pour des données mensuelles. (C_t) étant stationnaire, l'application du filtre $g(\mathbf{B})$ ne pose aucun problème. En revanche, le filtre étant bilatéral et infini, il n'est pas utilisable en pratique. Dans les méthodes de filtrage usuelles, le traitement de la fin de série est résolu par l'ajout de prévisions \hat{C}_{T+h} , pour $h = 1, \dots, H$, avec H "suffisamment" grand. Le filtre théorique tronqué à chaque extrémité est ensuite appliqué à la série ainsi prolongée.

Une autre approche consiste à expliciter le filtre $a(B)$ fondé sur l'ensemble d'information réduit²:

$$\underline{C}_T = \{C_t \mid -\infty < t \leq T\}$$

¹Ceci n'est en fait pas surprenant, car le cycle n'est pas calculé directement, mais défini comme un résidu; à ce titre, il cumule toutes les divergences observées sur les autres composantes entre les deux méthodes.

²En réalité, les données disponibles sont $\{C_t \mid 1 \leq t \leq T\}$. Mais on supposera T suffisamment grand pour négliger les effets de bord liés à la non-observation des valeurs C_t pour $t \leq 0$.

Formellement, le problème peut alors être énoncé de la façon suivante, la série à estimer étant $\{C_{t,T}\}_{1 \leq t \leq T}$:

$$\begin{cases} \min_{\{a_k(t,T)\}_{k \geq 0}} \mathbb{E}(C_t \{\omega_*\} - C_{t,T})^2 \text{ avec } C_{t,T} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t,T) C_{T-k} \\ \text{s.c.: } a_{t,T}(e^{i\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t,T) e^{ik\omega} \in \mathbf{L}^2([-\pi, \pi], f_X(\omega)d\omega) \end{cases} \quad (24)$$

La contrainte permet de définir sans ambiguïté la convergence de la série définissant $C_{t,T}$. Elle sera satisfaite automatiquement ici en raison de la continuité des fonctions $a_{t,T}(e^{i\omega})$ et $f_X(\omega)$.

Le programme (24) se résout de façon usuelle (Brilinger, 1981).

Notons $\Psi^{(C)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k^{(C)} z^k$ le développement de Wold de (C_t) et $(\varepsilon_t^{(C)})$ son innovation, de variance σ_c^2 :

$$C_{t,T} = a_{t,T}(\mathbf{B}) C_T = m_{t,T}(\mathbf{B}) \varepsilon_T^{(C)} \text{ avec } m_{t,T}(z) = a_{t,T}(z) \Psi^{(C)}(z)$$

On obtient:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(C_t \{\omega_*\} - \sum_{k=0}^{\infty} m_k(t,T) \varepsilon_{T-k}^{(C)} \right)^2 &= \mathbb{E} \left(C_t^2 \{\omega_*\} \right) - \frac{1}{\sigma_c^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\text{cov} \left(C_t \{\omega_*\}, \varepsilon_{T-k}^{(C)} \right) \right]^2 \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sigma_c m_k(t,T) - \frac{\text{cov} \left(C_t \{\omega_*\}, \varepsilon_{T-k}^{(C)} \right)}{\sigma_c} \right]^2 \end{aligned}$$

Cette expression est minimum pour :

$$m_k(t,T) = \frac{\text{cov} \left(C_t \{\omega_*\}, \varepsilon_{T-k}^{(C)} \right)}{\sigma_c^2}$$

Mais :

$$C_t \{\omega_*\} = g(\mathbf{B}) C_t = g(\mathbf{B}) \Psi^{(C)}(\mathbf{B}) \varepsilon_t^{(C)}$$

En décomposant :

$$h(\mathbf{B}) \Psi(\mathbf{B}) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \mathbf{B}^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} n_k \mathbf{B}^k$$

on obtient :

$$\begin{cases} m_k(t,T) = p_{k-(T-t)} \text{ si } k \geq T-t \\ m_{k,t,T} = n_{k-(T-t)} \text{ si } 0 \leq k < T-t \end{cases}$$

Soit finalement³, en supposant que $\Psi^{(C)}(z)$ ne s'annule pas sur le cercle unité⁴:

$$a_{t,T}(e^{i\omega}) = \frac{1}{\Psi^{(C)}(e^{i\omega})} \times \left\{ e^{i(T-t)\omega} \left[g(e^{i\omega}) \Psi^{(C)}(e^{i\omega}) \right] - \left[e^{i(T-t)\omega} g(e^{i\omega}) \Psi^{(C)}(e^{i\omega}) \right]_- \right\} \quad (25)$$

La série $\{C_{t,T}\}_{1 \leq t \leq T}$ estimée à la date T n'est plus stationnaire car ses coefficients dépendent du temps.

En restreignant l'ensemble d'information aux valeurs passées de C_t , et non de C_T (ce qui est licite pour la fin de la série), le programme s'écrit:

$$\begin{cases} \min_{\{a_k(t,T)\}_{k \geq 0}} \mathbb{E} \left(C_t \{\omega_*\} - \widehat{C}_t \{\omega_*\} \right)^2 \text{ avec } \widehat{C}_t \{\omega_*\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_{t-k} \\ \text{s.c.: } a(e^{i\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik\omega} \in \mathbf{L}^2([-\pi, \pi], f_X(\omega)d\omega) \end{cases} \quad (26)$$

³Le signe "+" (resp. "-") désigne les puissances positives ou nulles (resp. négatives) de $e^{i\omega}$ dans le développement en série de la fonction entre crochets.

⁴Comme $\Psi^{(C)}(z)$ ne s'annule pas sur le cercle unité, et que les $(\Psi_j^{(C)})$ sont sommables, on a en vertu d'un résultat classique $\frac{1}{\Psi^{(C)}(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} w_j z^j$, les coefficients (w_j) étant également sommables.

L'indice t ne joue plus aucun rôle, et on obtient le filtre unilatéral invariant dans le temps:

$$a(e^{i\omega}) = \frac{1}{\Psi^{(C)}(e^{i\omega})} \times \left[g(e^{i\omega}) \Psi^{(C)}(e^{i\omega}) \right]_+ \quad (27)$$

Notons que:

$$\left[g(e^{i\omega}) \Psi^{(C)}(e^{i\omega}) \right]_+ = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} g_{n-k} \Psi_k^{(C)} \right) e^{in\omega} \quad (28)$$

La série $\widehat{C}_t \{\omega_*\}$ est alors stationnaire, de densité spectrale:

$$f_{\omega_*}(\omega) = f_C(\omega) \left| \left[g(e^{i\omega}) \Psi^{(C)}(e^{i\omega}) \right]_+ \right|^2 \left| \Psi^{(C)}(e^{i\omega}) \right|^{-2} = \frac{\sigma_c^2}{2\pi} \left| \left[g(e^{i\omega}) \Psi^{(C)}(e^{i\omega}) \right]_+ \right|^2 \quad (29)$$

La variance de l'erreur de prévision $\mathbb{E} \left(C_t \{\omega_*\} - \widehat{C}_t \{\omega_*\} \right)^2$ vaut alors:

$$\text{var} \{\omega_*\} = \frac{\sigma_c^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left[g(e^{i\omega}) \Psi^{(C)}(e^{i\omega}) \right]_- \right|^2 d\omega \quad (30)$$

Il est important de remarquer que la série obtenue, $C_t \{\omega_*\}$ ou $\widehat{C}_t \{\omega_*\}$ doit être utilisée seulement comme indicateur. En effet, sa densité spectrale étant nulle sur un segment, la série est déterministe : son comportement est pathologique, car elle peut théoriquement être prévue sans erreur à partir de son passé. Elle ne saurait donc figurer dans les modèles économétriques traditionnels qui excluent systématiquement ce type de dynamique.

3.5 Prendre en compte les effets calendaires

Les effets calendaires (qualifiés également de "jours ouvrables") sont traditionnellement modélisés par l'introduction de variables déterministes représentant la structure des jours du mois (nombre de jours ouvrés, de jours fériés, de lundi, mardi, . . . , dimanche, etc.). Ce type de modélisation passe dans notre modèle (1) par la variable ξ_t . Il en résulte que les effets modélisés sont fixes. Or, à l'instar de la saisonnalité, les effets calendaires évoluent dans le temps avec l'activité économique (modification des habitudes de consommation, effet des 35 heures...). Il peut être intéressant alors de modéliser ces phénomènes comme la saisonnalité stochastique non-stationnaire, de façon à permettre un comportement évolutif de cette composante.

Les régularités calendaires saisonnières (ex : le mois de janvier a toujours 31 jours) sont captés dans la composante saisonnière. Les régularités calendaires non-saisonnières peuvent être associées, comme pour la saisonnalité, à une fréquence précise (voir Cleveland et Devlin (1980) pour une discussion détaillée). En effet, le nombre de jours moyen d'un mois est:

$$30.4375 = \frac{7 \times 31 + 4 \times 30 + \frac{3}{4} \times 28 + \frac{1}{4} \times 29}{12}$$

Lorsqu'une grandeur mesurée sur données quotidiennes, périodique de période $T = 7$ jours est agrégée pour former une nouvelle série mensuelle, la variable résultante admet une contribution importante à sa variabilité de la fréquence $\omega_{j_0} = 2\pi \times \frac{30.4375}{7}$. L'alias de cette fréquence dans l'intervalle $[0, \pi]$ est $\tilde{\omega}_{j_0} = 0.6964 \times \pi$.

De même, pour des données trimestrielles, le nombre moyen de jours d'un trimestre est:

$$91.3125 = 3 \times 30.4375$$

et $\omega_{jo} = 2\pi \times \frac{91.3125}{7}$, d'alias $\tilde{\omega}_{jo} = 0.2804 \times \pi$.

La procédure consiste alors à ajouter $\tilde{\omega}_{jo}$ à l'ensemble Θ des fréquences testées. Accepter l'hypothèse de racine unitaire pour cette fréquence (soit $\tilde{\omega}_{jo} \in \Theta_1$) introduira une composante calendaire fortement évolutive dans la série. À l'inverse, si $\tilde{\omega}_{jo} \in \Theta_2$, les effets seront stables. Dans ce dernier cas, le rejet du test de significativité joint des coefficients des variables $\cos(\tilde{\omega}_{jo}t)$ et $\sin(\tilde{\omega}_{jo}t)$ implique qu'il n'y a pas d'effets calendaires résultant de la répartition des jours de la semaine dans le mois.

Par rapport à l'approche usuelle, la nature précise des effets calendaires n'est pas explicitée. Ce point n'est pas essentiel dans notre travail puisque l'on se concentre d'abord sur la mesure du cycle.

Remarque : d'autres effets dont la régularité est plus difficile à capter peuvent être inclus directement sous la forme de variables déterministes dans la modélisation, notamment les fêtes mobiles (Pâques, Ramadan, fête des mères).

3.6 Quantifier les révisions

La décomposition de Beveridge et Nelson effectuée dans le cadre paramétrique repose intégralement sur la bonne spécification du modèle (1). Le processus de révision des composantes peut donc être décrit par l'enchaînement suivant :

1. Révision de la donnée brute
2. Révision du choix des racines unitaires / Révision du choix des variables d'intervention ξ_t
3. Révision de la structure du modèle ARMA estimé pour (u_t)
4. Révision des paramètres du modèle ARMA estimé pour (u_t) , incluant les coefficients des termes déterministes figurant dans d_t

L'étape 1 est hors du contrôle de l'utilisateur. En revanche, les étapes suivantes peuvent être effectuées selon des périodicités éventuellement distinctes, de manière à arbitrer entre deux objectifs opposés : intégrer le plus rapidement possible l'information disponible (avec pour conséquence l'introduction de révisions permanentes), et minimiser les révisions à court-terme (avec pour conséquence de différer la prise en compte des nouvelles données pour l'estimation des paramètres clés du modèle. La détermination de ces fréquences de réestimation ne peut être effectuée qu'empiriquement, à partir de l'étude du profil de révisions résultant des divers scénarios envisagés (voir Lacroix et Maurin (2008) pour une approche similaire expérimentée lors de la construction d'agrégats monétaires désaisonnalisés).

Le choix de l'approche semi-paramétrique permet de réduire les révisions associées aux étapes 3 et 4. En effet, seul l'ordre du modèle autorégressif peut varier en fonction du critère d'information, et ce choix est automatique. Aucune intervention n'est requise pour modifier la structure du modèle, comme dans les modélisations ARIMA classiques.

Puisque les paramètres décrivant la décomposition sont clairement identifiés, et tous sous contrôle de l'utilisateur, il est possible de quantifier les diverses révisions intervenant entre deux échéances successives, soit $t - 1$ et t . On adopte la notation suivante, pour une décomposition multiplicative (c'est à dire additive sur le logarithme de y_t) :

$$y_k^{(t)} = \prod_i y_{i,k}^{(t)} \{\varpi_l\} \text{ pour } k = 1, \dots, t$$

- $y_k^{(t)}$: la version de la donnée brute relative à l'échéance k et disponible en t , avec $t \geq k$
- ϖ_l : paramètres de la décomposition BN obtenues à partir de la série $\left(y_k^{(l)}\right)_{1 \leq k \leq l}$, avec $l \leq t$
- $y_{i,k}^{(t)} \{\varpi_l\}$: composante i de la décomposition construite à partir de la série $\left(y_k^{(t)}\right)_{1 \leq k \leq t}$ et des paramètres ϖ_l ; l'indice i prend ici trois valeurs (tendance, cycle, saisonnalité).

La décomposition dépend donc :

- du jeu de données brutes utilisées (paramètre (t))
- du jeu de paramètres utilisés (paramètre l).

En traitement courant, les décompositions en $t - 1$ et t sont respectivement:

$$\begin{cases} \overline{t-1} : y_k^{(t-1)} = \prod_i y_{i,k}^{(t-1)} \{\varpi_{t-1}\} \text{ pour } k = 1, \dots, t-1 \\ \underline{t} : y_k^{(t)} = \prod_i y_{i,k}^{(t)} \{\varpi_t\} \text{ pour } k = 1, \dots, t \end{cases}$$

La révision pour l'échéance $k \leq t - 1$ de la donnée brute se décompose selon chaque composante "i":

$$\frac{y_k^{(t)}}{y_k^{(t-1)}} = \prod_i \frac{y_{i,k}^{(t)} \{\varpi_t\}}{y_{i,k}^{(t-1)} \{\varpi_{t-1}\}} \quad (31)$$

On a ensuite :

$$\frac{y_{i,k}^{(t)} \{\varpi_t\}}{y_{i,k}^{(t-1)} \{\varpi_{t-1}\}} = \frac{y_{i,k}^{(t)} \{\varpi_t\}}{y_{i,k}^{(t)} \{\varpi_{t-1}\}} \times \frac{y_{i,k}^{(t)} \{\varpi_{t-1}\}}{y_{i,k}^{(t-1)} \{\varpi_{t-1}\}} \quad (32)$$

ce qui s'écrit, avec des notations évidentes:

$$(1 + \mathbf{R}_{t-1}^t \{\mathbf{k}, \mathbf{i}\}) = (1 + \mathbf{R}_{t-1}^t \{\varpi, \mathbf{k}, \mathbf{i}\}) \times (1 + \mathbf{R}_{t-1}^t \{\mathbf{y}, \mathbf{k}, \mathbf{i}\}) \quad (33)$$

d'où l'approximation:

$$\mathbf{R}_{t-1}^t \{\mathbf{k}, \mathbf{i}\} \simeq \mathbf{R}_{t-1}^t \{\varpi, \mathbf{k}, \mathbf{i}\} + \mathbf{R}_{t-1}^t \{\mathbf{y}, \mathbf{k}, \mathbf{i}\} \quad (34)$$

Le premier terme mesure les révisions liées à la révision des paramètres ($\varpi_{t-1} \rightarrow \varpi_t$). Le second terme décrit les révisions de la composante liées au révision de la série brute, c'est à dire le passage de l'échantillon brut disponible en $t-1$ à l'échantillon disponible en t . Cet effet ne devrait ici concerner que les échéances k pour lesquelles une révision est effectivement intervenue : les coefficients du filtre sont en effet les mêmes pour construire $y_{i,k}^{(t)} \{\varpi_{t-1}\}$ et $y_{i,k}^{(t-1)} \{\varpi_{t-1}\}$.

Il résulte alors de (31) un éclairage sur la révision sur la série brute, puisque celle-ci se factorise selon :

- Un effet "coefficients des filtres de la décomposition".
- Un effet "série filtrée"

$$\underbrace{\frac{y_k^{(t)}}{y_k^{(t-1)}}}_{\text{rev. globale}} = \underbrace{\left(\prod_i \mathbf{R}_{t-1}^t \{\varpi, \mathbf{k}, \mathbf{i}\} \right)}_{\text{rev. param.}} \times \underbrace{\left(\prod_i \mathbf{R}_{t-1}^t \{\mathbf{y}, \mathbf{k}, \mathbf{i}\} \right)}_{\text{rev. composantes}} \quad (35)$$

Une décomposition équivalente peut être menée sur le taux de croissance mensuel $g_k^{(t)} = \frac{y_k^{(t)}}{y_{k-1}^{(t)}}$, que l'on approxime par:

$$\tilde{g}_k^{(t)} = \Delta \log \left(y_k^{(t)} \right)$$

On a alors:

$$\begin{cases} \tilde{g}_k^{(t)} - \tilde{g}_k^{(t-1)} = \sum_i \left(\tilde{g}_{i,k}^{(t)} \{\varpi_t\} - \tilde{g}_{i,k}^{(t-1)} \{\varpi_{t-1}\} \right) \\ \tilde{g}_{i,k}^{(t)} \{\varpi_t\} - \tilde{g}_{i,k}^{(t-1)} \{\varpi_{t-1}\} = \left(\tilde{g}_{i,k}^{(t)} \{\varpi_t\} - \tilde{g}_{i,k}^{(t)} \{\varpi_{t-1}\} \right) + \left(\tilde{g}_{i,k}^{(t)} \{\varpi_{t-1}\} - \tilde{g}_{i,k}^{(t-1)} \{\varpi_{t-1}\} \right) \end{cases} \quad (36)$$

La décomposition de la révision de $g_k^{(t)}$ est complète, à condition de ne pas oublier l'erreur provenant de l'approximation logarithmique, $g_k^{(t)} - \tilde{g}_k^{(t)}$.

4 Une évaluation par simulation

L'usage d'un filtre asymétrique pour construire les estimations des composantes est peut être la principale critique adressée aux décompositions de Beveridge-Nelson. Les estimations souffriraient d'un déphasage avec les données brutes originelles, ce qui impliquerait une datation erronée, car effectuée avec retard, des inflexions conjoncturelles. Or, il semble, à notre connaissance, qu'aucune étude n'ait permis d'étayer de manière convaincante cet argumentaire. Au contraire, une étude récente (Mir et Osborn (2004)) indique, dans un cadre différent (modèles de type "Markov-Switching"), que le filtre symétrique associé à la procédure X12 conduit à des distorsions pour l'identification des changements de régime. En outre, l'usage de prévisions à la fin de la série combiné au maintien d'un filtre bilatéral conduit de facto à un filtre quasi-asymétrique pour ces dernières observations : en effet, les prévisions sont des fonctions linéaires des observations passées⁵.

Nous proposons d'illustrer cette question par le biais d'un bref exercice simulé, en partant d'un modèle simple pour lequel une composante cyclique est effectivement présente dans la dynamique de la série agrégée.

⁵La recherche de filtres asymétriques optimaux peut également être envisagée comme substitut au filtrage symétrique traditionnel dans les modèles à composantes inobservables, pour les estimations à la fin de l'échantillon (Bell et Martin (2002)).

Il s'agit alors d'examiner la "proximité" de cette composante inobservable avec la composante transitoire fournie par la décomposition BN.

Formellement, on se place dans le cadre de séries mensuelles, avec $\Theta^* = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right\}$ et le modèle classique à composantes inobservables :

$$X_t = T_t + C_t + S_t$$

La tendance stochastique I(1), sans trend déterministe est simplement

$$T_t = T_{t-1} + \varepsilon_{0,t} \text{ et } T_0 = c_0$$

où (ε_{0t}) est un bruit-blanc de variance σ_0^2 .

Le cycle est modélisé simplement selon la récurrence sur variables complexes:

$$\tilde{C}_t = \lambda e^{i\omega_c} \tilde{C}_{t-1} + \tilde{\varepsilon}_t \text{ pour } t \geq 1$$

avec $\lambda \in]0, 1[$: lorsque $\lambda \simeq 1$, \tilde{C}_t est très persistant; $\tilde{C}_0 = 0$ et :

$$\tilde{\varepsilon}_t = \varepsilon_{1t} + i\varepsilon_{2t}$$

ω_c désigne la fréquence envisagée pour le cycle ; (ε_{1t}) et (ε_{2t}) sont deux bruit-blancs indépendants, de variance σ_c^2 .

La composante cyclique est alors définie selon :

$$C_t = \text{Re} \left(\tilde{C}_t \right)$$

On vérifie facilement que (C_t) est bien stationnaire et d'espérance nulle, de forme ARMA(2,1):

$$(1 - 2\lambda \cos \omega_c \mathbf{B} + \lambda^2 \mathbf{B}^2) C_t = a_t + \theta_c a_{t-1} \text{ pour } (a_t) \text{ bruit-blanc}$$

On considérera des cycles de 2 ans, soit $\omega_c = \pi \setminus 12$.

La composante saisonnière S_t se décompose comme $\sum_{\omega_j \in \Theta^*} S_{j,t}$ avec, pour $\omega_j = \frac{\pi}{2}, \pi$:

$$\tilde{S}_{j,t} = e^{i\omega_j} \tilde{S}_{j,t-1} + \tilde{\varepsilon}_{j,t} \text{ pour } t \geq 1$$

La valeur initiale est $\tilde{S}_{j,0} = (c_{j,0}, c_{j,0}^*)'$ et:

$$\tilde{\varepsilon}_{j,t} = \varepsilon_{j,1t} + i\varepsilon_{j,2t}$$

$(\varepsilon_{j,1t})$ et $(\varepsilon_{j,2t}^*)$ sont des bruits blancs indépendants de variances σ_j^2 . On définit ensuite:

$$S_{j,t} = \text{Re} \left(\tilde{S}_{j,t} \right)$$

$(S_{j,t})$ est de forme ARMA(2,1) autour d'un terme déterministe $d_{j,t}$ pour $\omega_j \in]0, \pi[$, AR(1) si $\omega_j = \pi$:

$$\begin{cases} \Delta_\omega(\mathbf{B})(S_{j,t} - d_{j,t}) = a_{j,t} + \theta_j a_{j,t-1} \\ (a_{j,t}) \text{ bruit-blanc, et } \theta_j = 0 \text{ si } \omega_j = \pi \end{cases}$$

Les ratios suivants permettent de contrôler l'importance relative (par rapport au cycle) de chaque composante, en terme de contribution à la volatilité de X_t :

$$r_0 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_c^2} \text{ et } r_j = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_c^2}$$

Il en résulte que $\varphi(\mathbf{B})X_t$ suit un modèle ARMA(2,5).

L'application de la décomposition fournit la série stationnaire C_t^{BN} . Mais il est clair que le couple (C_t, C_t^{BN}) est stationnaire, bivarié. On peut donc définir le co-spectre $f_{12}(\omega)$, les densités spectrales f_1 et f_2 associées à ces deux variables, puis les grandeurs usuelles (cohérence et phase):

$$K(\omega) = \frac{|f_{12}(\omega)|^2}{f_1(\omega)f_2(\omega)}, \quad Ph(\omega) = \arg f_{12}(\omega)$$

Rappelons que K est toujours compris entre 0 et 1, et qu'une valeur proche de 1 à une fréquence ω donnée indique la présence d'une liaison marquée, linéaire, pour cette fréquence, entre les deux séries. La phase $Ph(\omega)$ est interprétable par le biais de la pente en ω , i.e. $Ph'(\omega)$ (Brockwell et Davies (1991)). Une pente proche de zéro indique que les deux séries sont synchrones en ω . Une pente positive indique que la série C_t^{BN} est en retard sur C_t pour la fréquence considérée, et la valeur de la pente donne une indication du nombre de périodes associée à ce retard. En revanche, si la pente est négative, alors C_t^{BN} est un indicateur avancé de C_t pour cette fréquence. Notons enfin que la phase et la cohérence en ω ne dépendent que des paramètres du modèle définissant (X_t) .

Nous cherchons maintenant à évaluer ces deux fonctions en prenant en compte deux sources d'incertitude pouvant affecter la décomposition de BN : la taille réduite de l'échantillon de données disponible, et la mauvaise spécification du modèle ARMA.

On dispose d'un estimateur à noyau classique de la densité spectrale du vecteur (C_t, C_t^{BN}) . Il en résulte les estimateurs $\widehat{K}(\omega)$ et $\widehat{Ph}(\omega)$. On approxime la loi de ces estimateurs par l'usage de simulations de Monte Carlo, selon la méthodologie suivante :

1. Générer $N_{\text{sim}} = 1000$ séries indépendantes entre elles $(X_t^{(h)})_{1 \leq t \leq T, h=1, \dots, N_{\text{sim}}}$ en supposant les ε gaussiens et $T = 240$. Conserver $(C_t^{(h)})_{1 \leq t \leq T, h=1, \dots, N_{\text{sim}}}$.
2. Pour chaque $\omega_j = \frac{2\pi j}{T}$, $j \in \{0, 1, [T/2]\}$ et $h = 1, \dots, N_{\text{sim}}$, calculer $C_t^{(h)BN}$ puis $\widehat{f}_1^{(h)}(\omega)$, $\widehat{f}_2^{(h)}(\omega)$, $\widehat{K}^{(h)}(\omega)$ et $\widehat{Ph}^{(h)}(\omega)$. Pour le calcul de la décomposition, on se limite au modèle (mal spécifié) AR(12) pour chaque échantillon. Cette hypothèse revient en fait à effectuer un traitement semi-paramétrique de l'estimation de la densité spectrale de u_t (Bühlmann, (1997)).

3. Calculer les estimateurs de Monte Carlo:

$$\begin{cases} \widehat{f}_{j*}(\omega) &= \frac{1}{N_{\text{sim}}} \sum_{h=1}^{N_{\text{sim}}} \widehat{f}_j^{(h)}(\omega), \quad j = 1, 2 \\ \widehat{K}_*(\omega) &= \frac{1}{N_{\text{sim}}} \sum_{h=1}^{N_{\text{sim}}} \widehat{K}^{(h)}(\omega) \\ \widehat{Ph}_*(\omega) &= \frac{1}{N_{\text{sim}}} \sum_{h=1}^{N_{\text{sim}}} \widehat{Ph}^{(h)}(\omega) \end{cases}$$

ainsi que l'intervalle de confiance⁶:

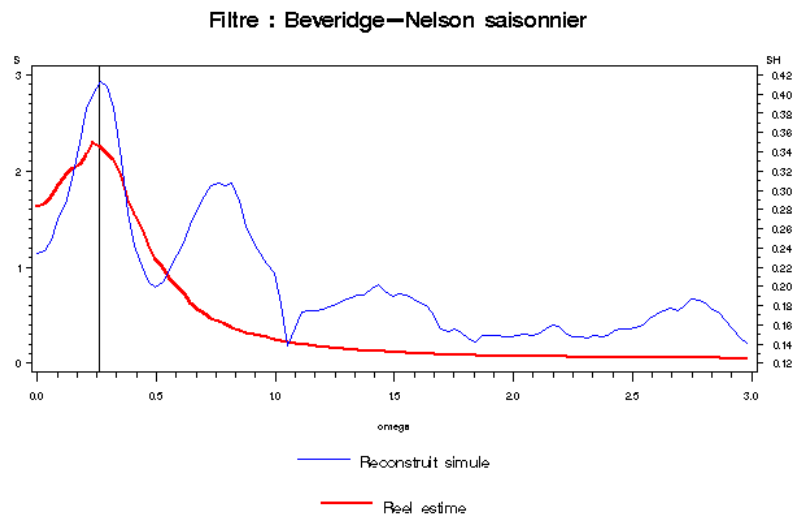


Fig.1

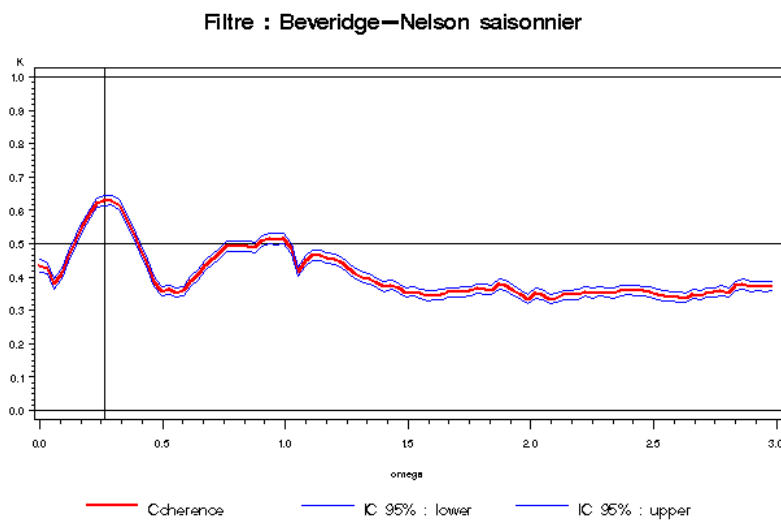


Fig.2

⁶Cet intervalle repose sur la normalité asymptotique de la moyenne calculée à partir d'un échantillon de variables indépendantes et équidistribuées.

Filtre : Beveridge—Nelson saisonnier

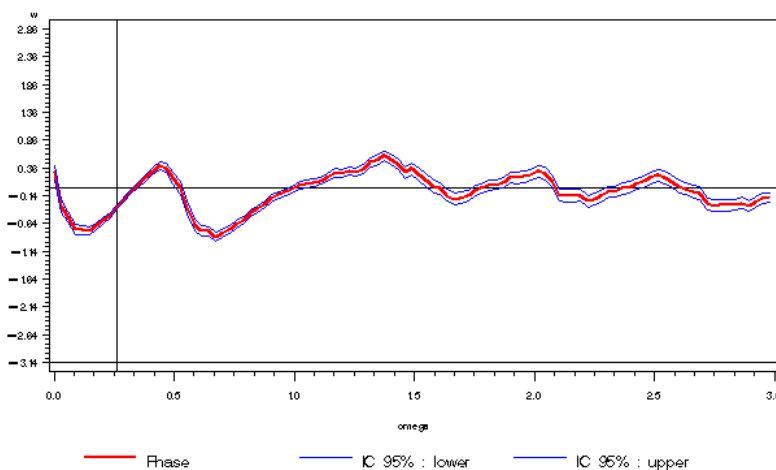


Fig.3

Le spectre de C_t^{BN} restitue la contribution importante de la fréquence $\omega_c = \pi/12$ (trait vertical sur les graphiques). En revanche, pour les autres fréquences, des divergences apparaissent entre les deux spectres : ceci n'est pas surprenant, dans la mesure où C_t^{BN} n'est **pas** un estimateur statistique⁷ de C_t , mais plutôt un indicateur de sa régularité temporelle la plus importante, liée à la fréquence ω_c .

La cohérence apparaît satisfaisante (car maximale) en ω_c . La phase indique, comme on pouvait s'y attendre, que C_t^{BN} est en retard sur C_t . Une régression locale de $\widehat{Ph}_*(\omega)$ sur la constante et ω , pour $\omega \in [0, 1; 0.5]$ donne une estimation empirique de la pente : on obtient un retard $d(\omega_c) = 3,66 \simeq 1$ trimestre.

À titre de comparaison, on effectue le même travail de décomposition de la série à l'aide du logiciel TRAMO-SEATS tel que figurant dans l'interface DEMETRA développée par EUROSTAT. Les échantillons simulés sont les mêmes que précédemment, et pour chacun d'entre eux, on laisse la procédure déterminer automatiquement le modèle ARIMA "optimal" utilisé ensuite pour l'estimation des composantes inobservables. Cette décomposition fournit la composante saisonnière, l'irrégulier, la tendance, et, éventuellement, la composante cyclique. Un premier résultat relativement surprenant est qu'une composante cyclique n'est effectivement estimée que dans 46 % des échantillons traités. Pour les autres échantillons, soit aucun modèle ARIMA n'a passé avec succès l'ensemble des tests de validation, soit les paramètres et/ou la structure du modèle ne sont pas compatibles avec l'existence d'un cycle, tel que défini par la procédure SEATS.

Sur la base des 459 échantillons pour lesquels le cycle a été estimé, l'analyse de Monte-Carlo fournit les

⁷Les ordres de grandeur des deux densités spectrales sont du reste très différents.

résultats suivants:

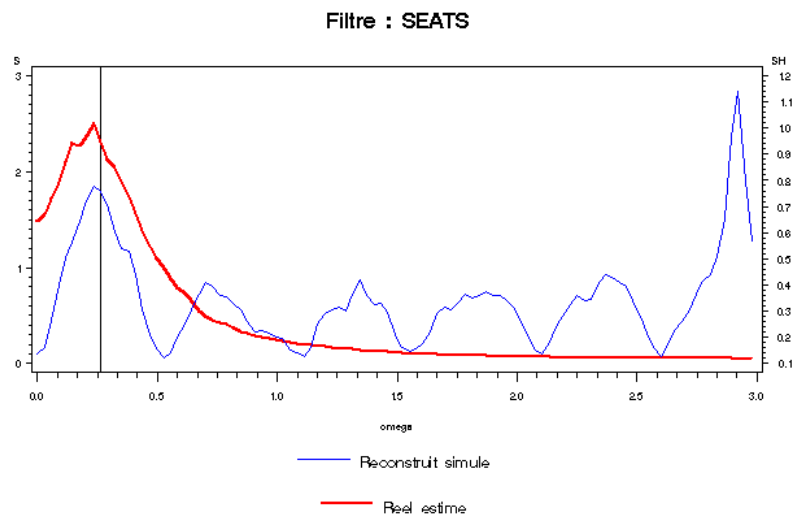


Fig.4

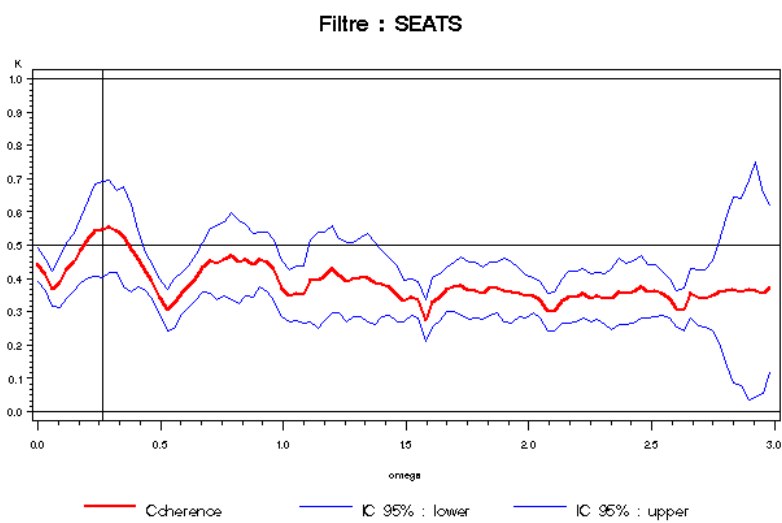


Fig.5

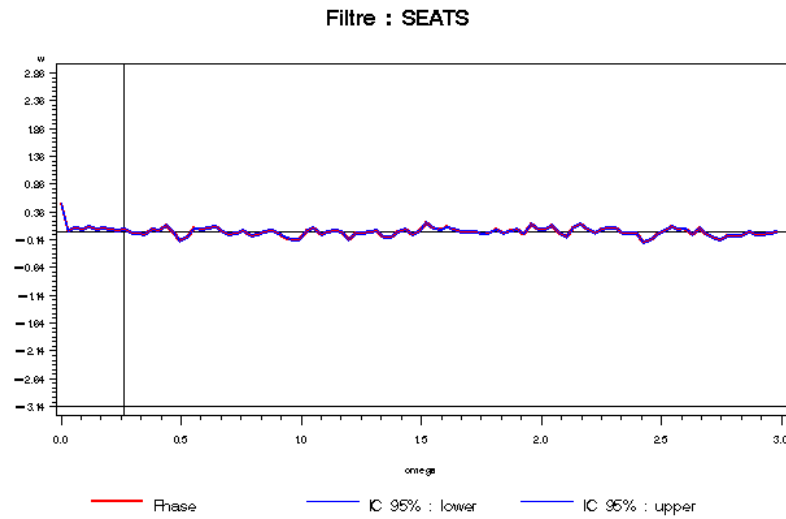


Fig.6

La phase est pratiquement nulle à toutes les fréquences, ce qui est conforme à l'usage d'un filtre bilatéral. Le spectre de C_t^{BN} présente clairement un caractère saisonnier, avec un maximum global en $5\pi/6$ (5 cycles/an). En ω_c , on observe un maximum local en ω_c , la cohérence en ce point étant légèrement plus faible que pour la méthode BN. Au total, il est difficile d'interpréter C_t^{BN} comme une série à dominante cyclique.

5 Application empirique : la contribution française à M3 zone euro

5.1 Méthode de Beveridge-Nelson paramétrique

La série étudiée est la contribution française mensuelle à l'agrégat M3 de la zone euro. La série est étudiée sur la période de janvier 1980 à avril 2004. La Banque de France effectue la CVS de cette série, et commente des taux de croissance trimestriels ou annuels, les évolutions mensuelles apparaissant très volatiles. Le glissement

mensuel et le taux de croissance annuel mesurés à partir de la série CVS sont représentés ci-dessous:

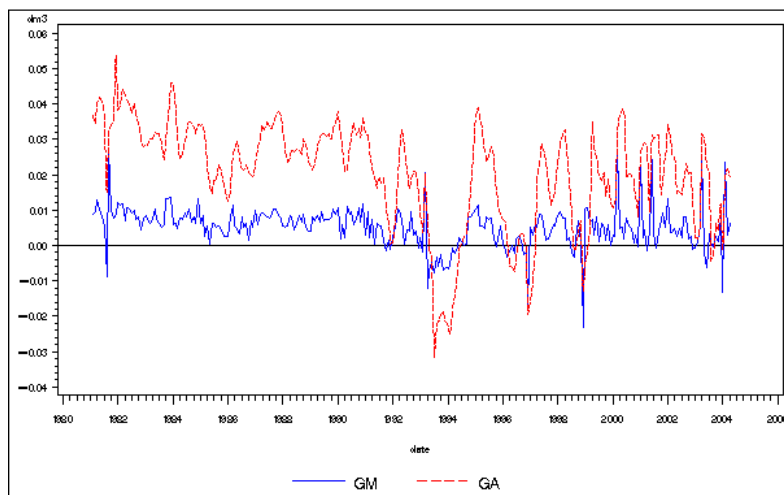


Fig. 7. Glissements mensuel et annuel de M3 France

La CVS officielle produite par le SASM repose sur l'usage de SEATS appliqué à la série de flux corrigée des effets déterministes. Les encours sont ensuite reconstruits par cumul des flux. Ensuite, les taux de croissance mensuels sont calculés en appliquant à la série d'encours diverses corrections (effets de change, de valorisation, changement de périmètre ...), de sorte que la variation d'encours n'est ne fait pas exactement égale au flux).

Dans le cadre de notre exercice de comparaison, nous travaillerons directement à partir de la série d'encours brute en logarithme (pour réduire les problèmes d'hétéroscédasticité), soit $y_t = \log(M_{3t})$, corrigée des effets calendaires et autres effets déterministes identifiés par le logiciel TRAMO. Nous effectuons ensuite la décomposition par le logiciel SEATS, et par la méthode BN. Enfin, les taux de croissance mensuels seront calculés directement à partir des encours obtenus.

On suppose d'emblée que (y_t) possède au moins une racine unitaire à la fréquence $\omega = 0$, conformément aux hypothèses standards de modélisation de demande de monnaie. Les tests de racine unitaire effectués au seuil de 5 % sur la variable $(\Delta_0 y_t)$ donnent les résultats suivants (le test HEGY est effectué avec un seul retard sur la partie AR d'après le critère BIC) :

ω_j	0	$\pi \setminus 6$	$\pi \setminus 3$	$\pi \setminus 2$	$2\pi \setminus 3$	$5\pi \setminus 6$	π
HEGY	I(1)	I(0)	I(0)	I(0)	I(1)	I(0)	I(1)
CH	I(1)	I(1)	I(1)	I(0)	I(1)	I(1)	I(1)

Les divergences entre les deux tests nous amènent à considérer ensuite la variable filtrée:

$$\tilde{y}_t = (1 - \mathbf{B})^2 (1 + \mathbf{B}) (1 + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2) y_t$$

Le test HEGY sur cette variable (effectué avec un AR(9)) conduit à:

ω_j	$\pi \setminus 6$	$\pi \setminus 3$	$5\pi \setminus 6$
HEGY	I(0)	I(0)	I(0)

On retient donc pour y_t l'hypothèse \mathbf{H}_d^2 avec:

$$\Theta_1 = \left\{ 0, \frac{2\pi}{3}, \pi \right\}, \quad \Theta_2 = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

Les statistiques de test HEGY obtenues sur les sous-échantillons (cf Lacroix (2008)) sont décrites par les graphiques ci-dessous (les courbes relatives à $\omega = \pi/6, \pi/3$ et π ne sont pas représentées, les deux premiers étant similaires à $\omega = 2\pi/3$, et la dernière à $\omega = 0$), le trait horizontal désigne la valeur critique asymptotique du test au seuil de 5%).

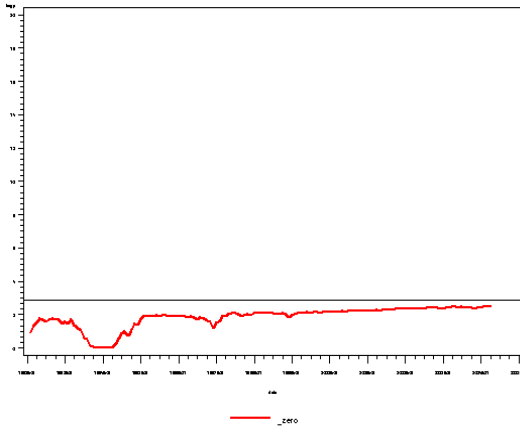


Fig.8. $\omega = 0$

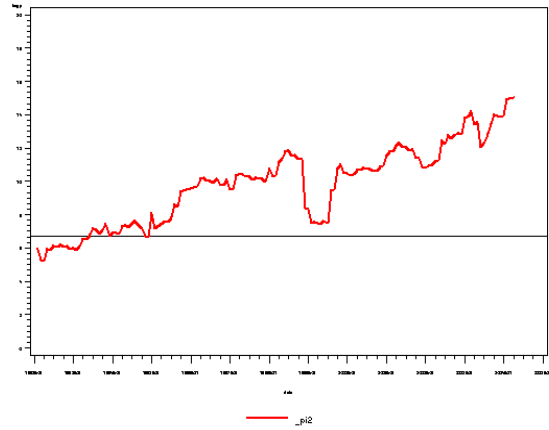


Fig.9. $\omega = \pi/2$

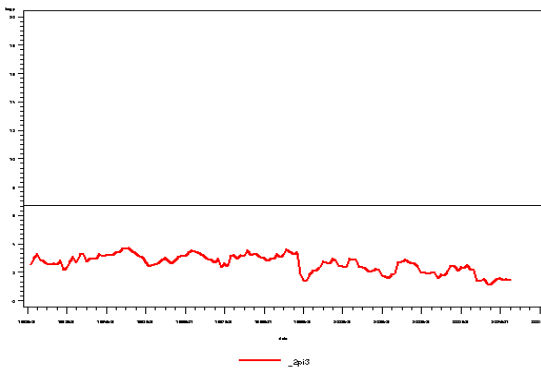


Fig.10. $\omega = 2\pi/3$

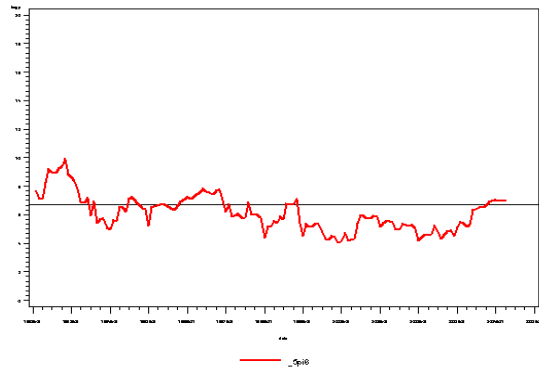


Fig.11. $\omega = 5\pi/6$

On observe une croissance nette pour $\omega = \pi/2$ cohérente avec le rejet de l'hypothèse nulle, et une constance de la statistique pour $\omega = 0, 2\pi/3$ également cohérente avec l'acceptation de \mathbf{H}_0 . Le cas $\omega = 5\pi/6$ apparaît plus litigieux : on aurait pu tout aussi bien inclure cette fréquence dans Θ_1 .

Le traitement paramétrique du résidu u_t s'effectue par un modèle ARMA, qui s'écrit, après élimination des termes déterministes non-significatifs:

$$(1 - \alpha_1 \mathbf{B} - \alpha_2 \mathbf{B}^2) (\tilde{y}_t - d_t) = (1 + \theta_1 \mathbf{B}^3) (1 + \theta_2 \mathbf{B}^6) (1 + \theta_3 \mathbf{B}^{12}) \varepsilon_t$$

La composante déterministe est spécifiée selon :

$$d_t = \beta_1 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + \beta_2 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \beta_3 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \beta_4 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + \beta_5 \cos\left(\frac{5\pi t}{6}\right)$$

Ce modèle est validé par les tests usuels (tests d'autocorrélation des résidus, test de rupture) dont les résultats ne sont pas détaillés ici.

Nous obtenons alors la décomposition de la série y_t , puis la décomposition multiplicative de M_{3t} en prenant l'exponentielle de chaque composante.

5.2 Méthode semi-paramétrique

Le modèle estimé pour (u_t) est un AR(p). Le nombre de retards, déterminé par critère SBC dans l'intervalle [5; 20] (pour un échantillon de taille $T = 292$) est $p_{opt} = 9$. On constate d'abord que les résidus estimés (labellés "np10" sur le graphique ci-dessous) sont très proches de ceux obtenus précédemment (label "p10"):

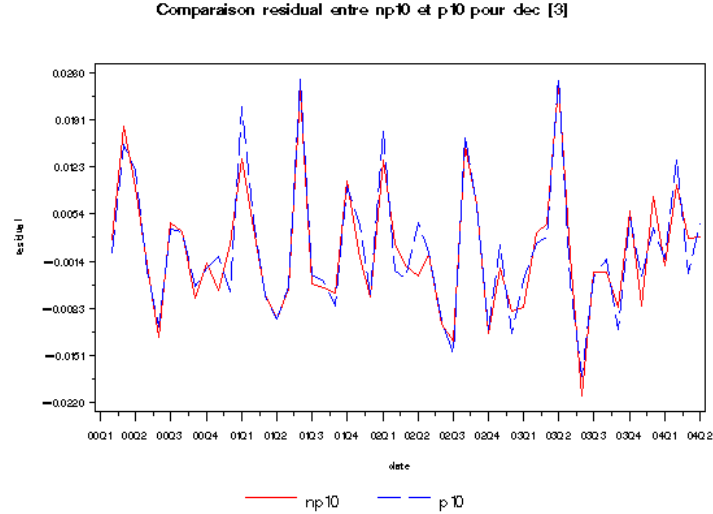


Fig.12. Résidus $\hat{\varepsilon}_t$

En revanche, les cycles estimés sont pratiquement en opposition de phase !

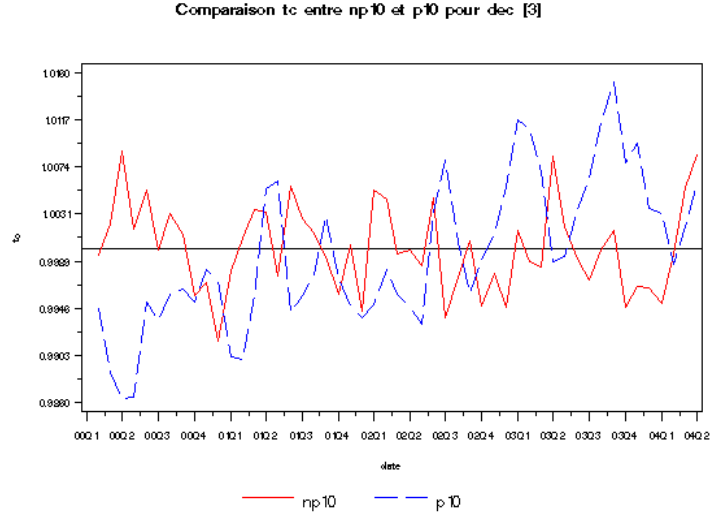


Fig.13. Composantes transitoires

Ce résultat surprenant à deux causes possibles :

- soit le modèle ARMA est mal-spécifié
- soit l'approximation semi-paramétrique ne "fonctionne" pas, et les estimateurs afférents sont biaisés.

Concrètement, les écarts sur les composantes stochastiques estimées proviennent:

- a] des écarts sur les résidus estimés $\hat{\varepsilon}_t$
- b] des écarts sur les deux paramètres définissant $\hat{\lambda}_j(\mathbf{B})$ pour $\omega_j \in]0, \pi[$, soit ici $\omega_j = \frac{2\pi}{3}$
- c] des écarts sur $\hat{\lambda}_j = \hat{\Psi}(-1)$ pour $\omega_j = \pi$
- d] des écarts sur $\hat{\eta}_{1,1} = \tilde{a}_1 \hat{\Psi}(1) - \mu_1 \hat{\Psi}'(1)$ et $\hat{\eta}_{1,2} = \mu_1 \hat{\Psi}(1)$ pour $\omega_j = 0$

Les paramètres intervenant dans b], c] et d] convergent en \sqrt{T} vers des lois normales. Pour estimer leurs variances asymptotiques et comparer les distributions obtenues par chacune des méthodes, nous recourons à un exercice de Bootstrap selon la méthodologie suivante :

- **Étape 1** : À partir des résidus estimés $\hat{\varepsilon}_t$ pour $t \geq p + 1$, p étant l'ordre de la partie AR du modèle (on note de même q l'ordre de la partie MA), calculer les résidus centrés :

$$\hat{\varepsilon}_{t,T} = \hat{\varepsilon}_t - \frac{1}{T-p} \sum_{j=p+1}^T \hat{\varepsilon}_j$$

- **Étape 2** : Soit $F_{\hat{\varepsilon}}$ la fonction de répartition empirique des $(\hat{\varepsilon}_{t,T})_{p+1 \leq t \leq T}$. Générer un échantillon de variable i.i.d suivant la loi $F_{\hat{\varepsilon}}$:

$$\text{Pour } t = 1 - \max(p, q), \dots, 0, 1, \dots, T : \varepsilon_t^* \rightsquigarrow F_{\hat{\varepsilon}}$$

- **Étape 3** : Générer le processus Bootstrap de u_t associé à (ε_t^*) selon:

$$\begin{cases} \widehat{\phi}(\mathbf{B}) u_t^* = \widehat{\varkappa}(\mathbf{B}) \varepsilon_t^* & \text{pour } t \geq p+1 \\ u_t^* = \widehat{u}_t & \text{pour } 1 \leq t \leq p \end{cases}$$

$\widehat{\phi}(\mathbf{B})$ et $\widehat{\varkappa}(\mathbf{B})$ sont les paramètres estimés à partir de \widehat{u}_t (i.e, la série étudiée).

- **Étape 4** : Calcul des observations Bootstrap différenciées à partir de u_t^* et $\widehat{d}_t = [d_{r+1} | \dots | d_L] [\widehat{\mathbf{a}}_0]$, composante déterministe estimée sur la série étudiée :

$$z_t^* = \widehat{d}_t + u_t^* = [d_{r+1} | \dots | d_L] [\widehat{\mathbf{a}}_0] \quad \text{pour } t = 1, \dots, T$$

- **Étape 5** : Calcul des observations Bootstrap en niveau à partir de la récurrence :

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{B}) y_t^* = z_t^* & \text{pour } t = 1, \dots, T \\ y_t^* = y_t & \text{pour } t \in \{-d+1, \dots, -1, 0\} \end{cases}$$

- **Étape 6** : Répéter \mathbf{N}_B fois les étapes 2 à 5 pour obtenir \mathbf{N}_B pseudo-échantillons $(y_{b,t}^*)_{1 \leq b \leq B, 1 \leq t \leq T}$. On prend $\mathbf{N}_b = 1000$ pour limiter les temps de calcul.
- **Étape 7** : Pour chaque échantillon Bootstrap $b = 1, \dots, B$, effectuer les décomposition semi-paramétrique et paramétrique, et récupérer $\widehat{\lambda}_j^b(\mathbf{B})$, $\widehat{\eta}_{1,1}^b$ et $\widehat{\eta}_{1,2}^b$.
- **Étape 8** : Calculer la densité et la variance des distributions pour chacune des variables:

$$\sqrt{T} \left(\widehat{\lambda}_{1,j}^b - \widehat{\lambda}_{1,j} \right), \sqrt{T} \left(\widehat{\lambda}_{2,j}^b - \widehat{\lambda}_{2,j} \right), \dots$$

Les densités sont calculés à partir d'un estimateur non-paramétrique à noyau gaussien d'Epachechnikov.

La validité de la procédure Bootstrap est montrée par exemple dans Bühlmann (1996), pour la méthode semi-paramétrique avec régression sur variables déterministes comme c'est le cas ici, et par Kress et Franke (1989) pour la méthode paramétrique. Le terme "validité" signifie par exemple que la loi de $\sqrt{T} \left(\widehat{\lambda}_{1,j}^b - \widehat{\lambda}_{1,j} \right)$ conditionnelle aux observations (y_t) converge vers la loi de $\sqrt{T} \left(\widehat{\lambda}_{1,j} - \lambda_{1,j} \right)$ dans l'espace des distributions (fonctions de répartition) muni d'une métrique appropriée (distance de Mallows).

On obtient les distributions suivantes (fig. 14a à 14e) :

Lecture : "p10" = paramétrique, "np10" = semi-paramétrique.

Coefficients MA(1): densité bootstrap de $\sqrt{T}(\hat{h}_r - r)$

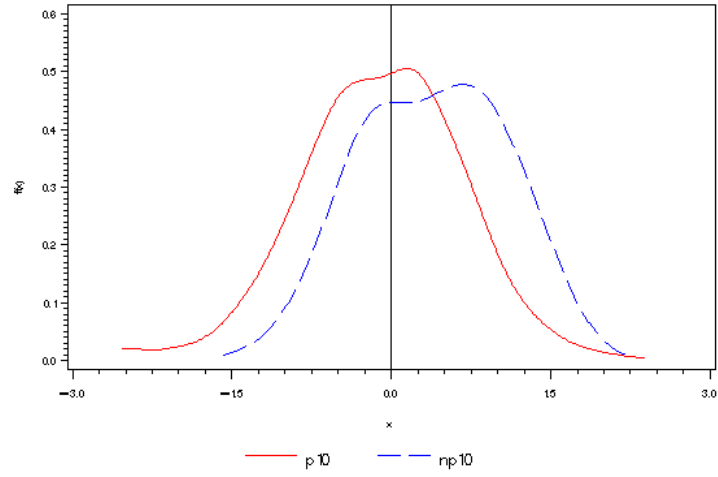


Fig.14a. $\lambda_{1,j}$ pour $\omega_j = \frac{2\pi}{3}$

Coefficients MA(1): densité bootstrap de $\sqrt{T}(\hat{h}_i - i)$

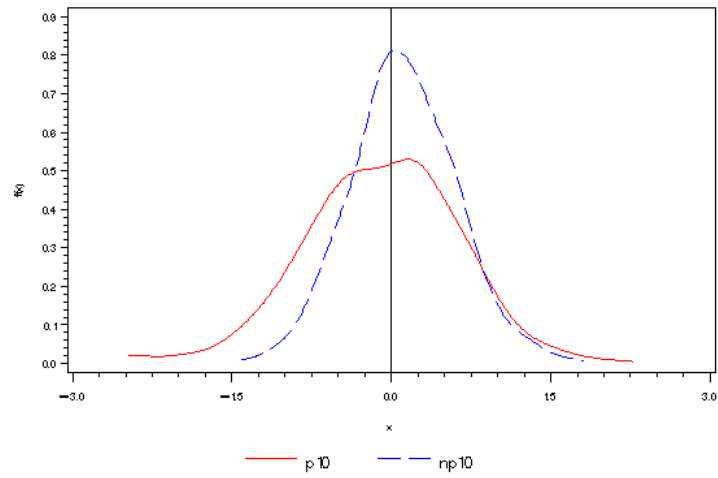


Fig.14b. $\lambda_{2,j}$ pour $\omega_j = \frac{2\pi}{3}$

Coefficients MA(1): densite bootstrap de $\sqrt{T}(h_{r,\pi} - r_{\pi})$

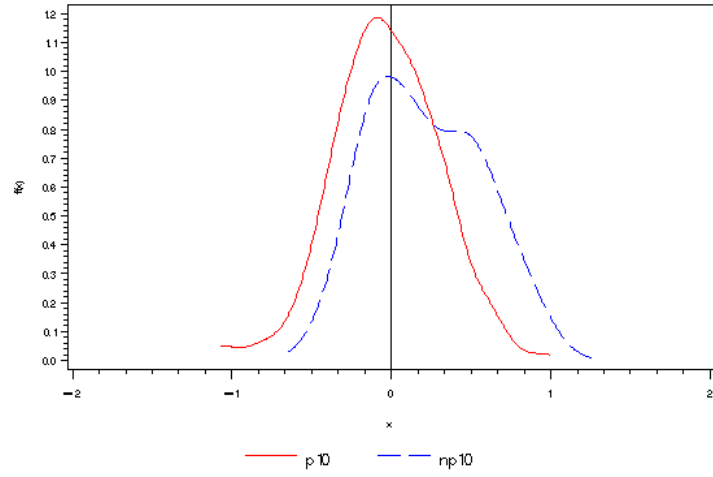


Fig.14c. λ_j pour $\omega_j = \pi$

Coefficients freq zero: densite bootstrap de $\sqrt{T}(h_{l1_ZERO} - l1_ZERO)$

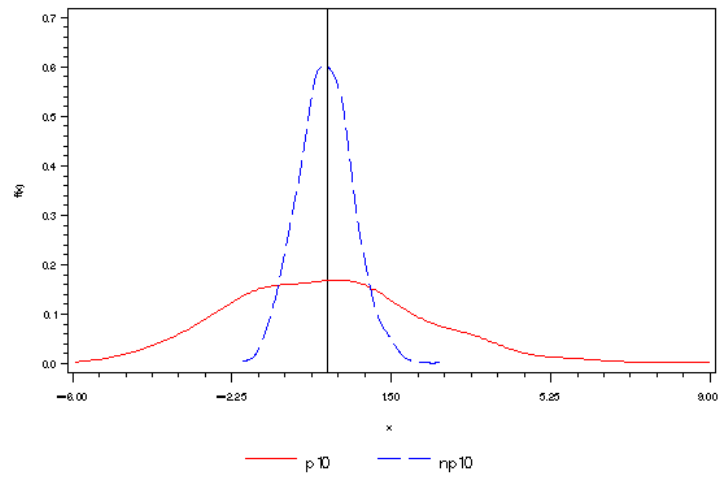


Fig.14d. $\mu_{1,1}$ pour $\omega_j = 0$

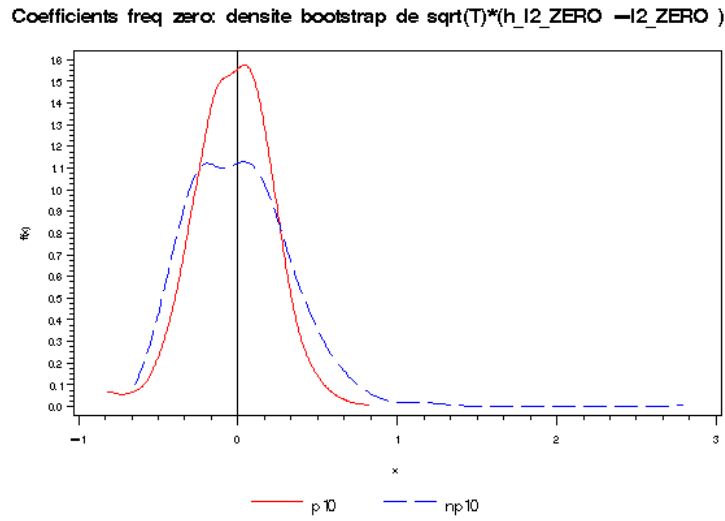


Fig.14e. $\mu_{1,2}$ pour $\omega_j = 0$

Les distributions sont proches entre les deux méthodes, sauf pour le poids de la composante I(1), $\mu_{1,1}$ pour lequel la variance calculée avec l'estimateur paramétrique est nettement plus élevée (5,29 contre 0,41). Cet écart pourrait indiquer un problème de spécification du modèle ARMA aux basses fréquences⁸. Dans la mesure où le profil de C_t dépend fortement de ce paramètre, **nous sommes conduits à privilégier la décomposition semi-paramétrique**. Ses composantes sont décrites par les graphiques ci-dessous :

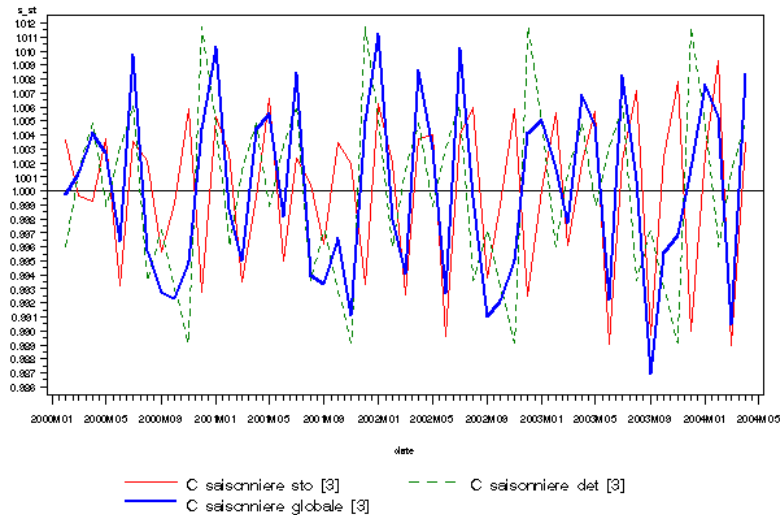


Fig. 15. Composante saisonnière

⁸Sous l'hypothèse d'une bonne spécification du modèle, la variance asymptotique théorique de l'estimateur semi-paramétrique est toujours inférieure à la variance de l'estimateur paramétrique.

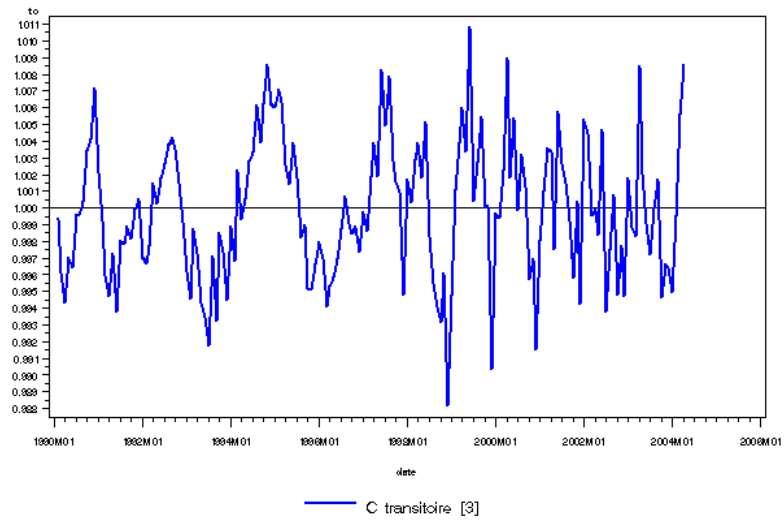


Fig. 16. Composante transitoire

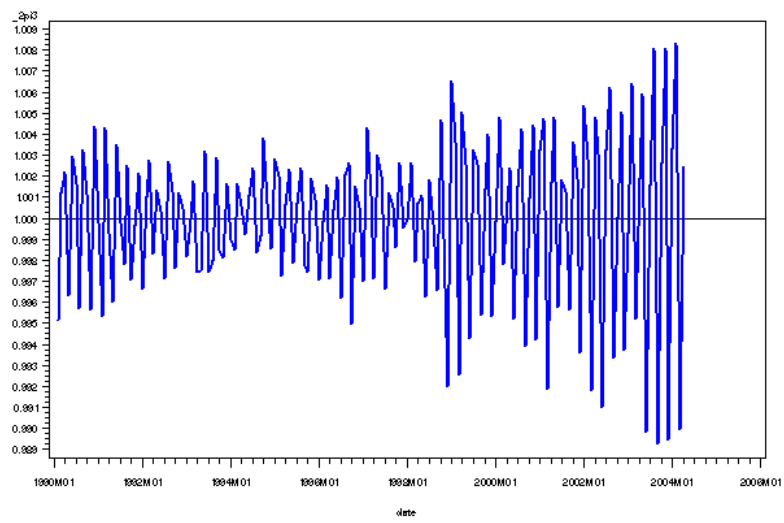


Fig. 17. Composante saisonnière stochastique, $\omega = \frac{2\pi}{3}$

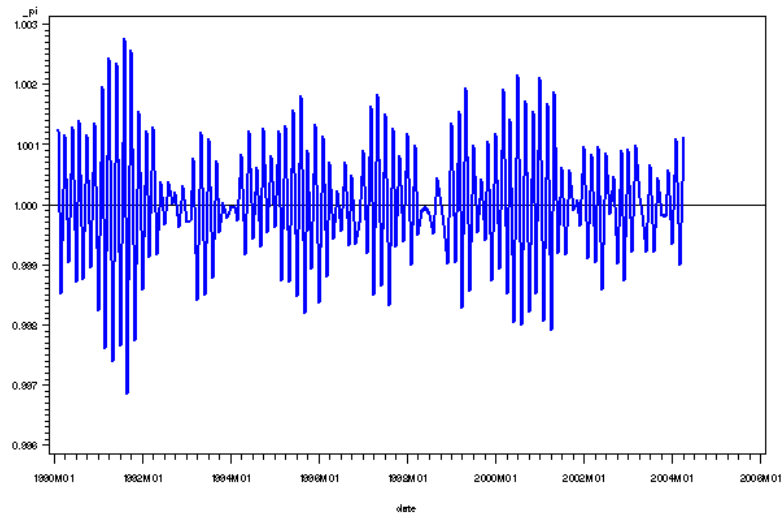


Fig. 18. Composante saisonnière stochastique, $\omega = \pi$

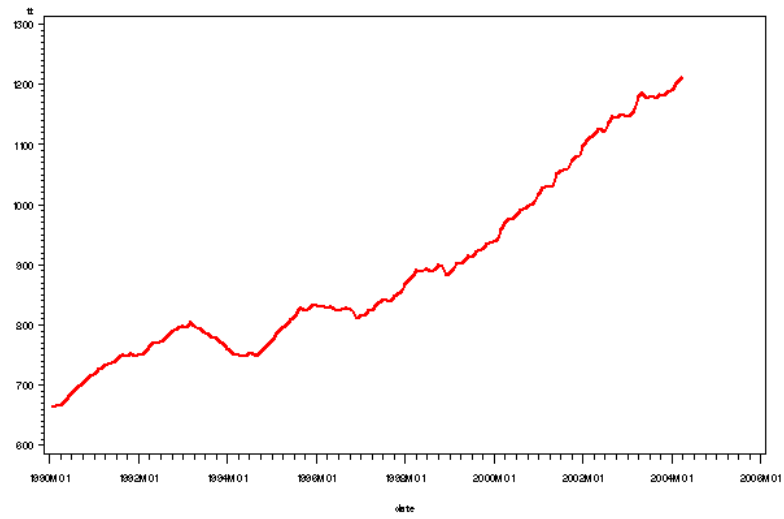


Fig.19. Tendance (stoch. + déterministe)

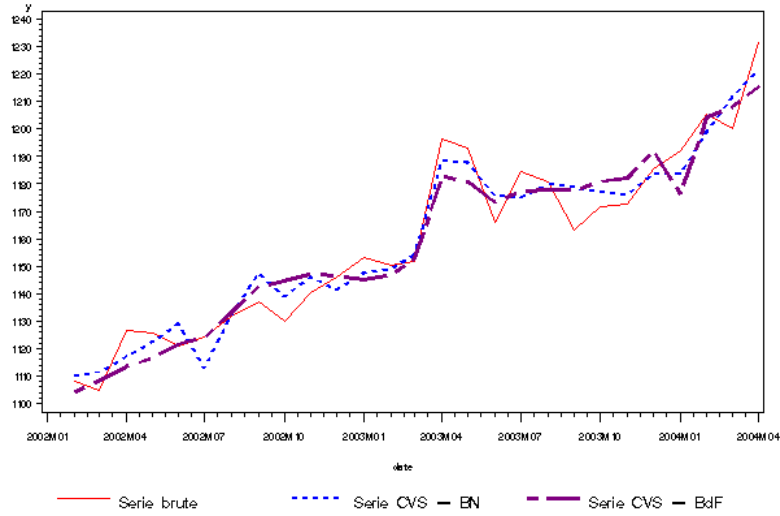


Fig. 20. Séries CVS

Les graphiques des composantes saisonnières stochastiques (fig. 15, 16 et 17) présentent des changements de régime typiques de la non-stationnarité : ils traduisent le caractère évolutif de la saisonnalité de la série. La même remarque s'applique à la tendance (fig. 19 et 20), pour laquelle la composante I(2) apparaît plus lisse que la composante I(1), comme il se doit. Enfin, la composante transitoire présente deux caractéristiques dominantes : l'une est saisonnière (période de 12 mois), l'autre peut être associée à la présence d'un cycle de période $T_c \simeq 2,7$ ans, comme en témoigne l'estimation de la densité spectrale avec bandwidth optimal de cette composante. L'exercice de bootstrap décrit précédemment permet en outre de construire un intervalle de confiance à 95 % pour chaque estimation $\widehat{f}_C(\omega)$ obtenue. Les détails de cette estimation figurent en annexe.

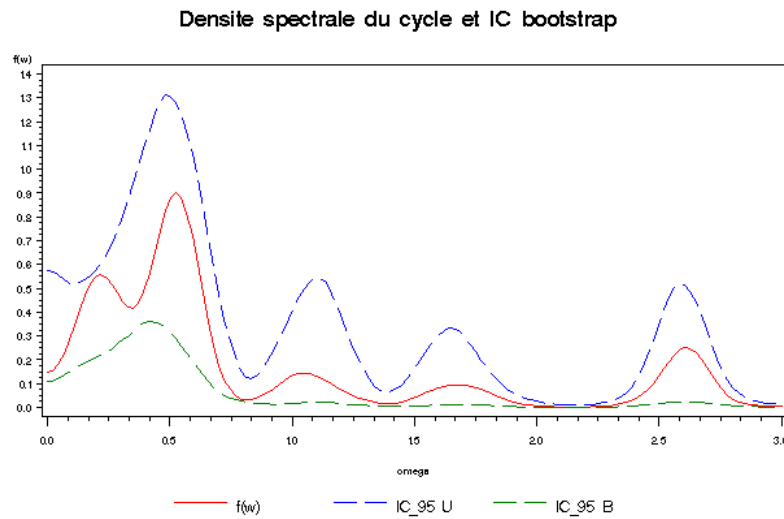


Fig.21. Spectre de C_t , et intervalle de confiance à 95%

On note que la forme de l'intervalle de confiance ne confirme pas clairement la présence de la composante cyclique. Rappelons que l'existence d'effets saisonniers dans le cycle n'est pas incompatible avec le fait que le cycle fasse partie de la composante CVS de la série : en effet, la saisonnalité incluse dans la composante saisonnière est par définition très persistente (déterministe, ou associée à une racine unitaire). Or, la saisonnalité mise en évidence dans C_t est par définition, peu persistente : il s'agit d'un choc temporaire assimilable ayant localement (dans le temps) un caractère saisonnier.

La série CVS ainsi construite (fig. 20) semble un peu plus volatile que la CVS réalisée par le logiciel SEATS. Ceci provient pour partie de l'usage de filtres bilatéraux dans SEATS dont le pouvoir de lissage est supérieur aux composantes asymétriques utilisées dans la décomposition de Beveridge-Nelson. Mais le facteur essentiel ici est l'absence de composante cyclique identifiée par SEATS, ce qui conduit à des facteurs saisonniers plus volatiles, et en conséquence une CVS plus lisse : nous revenons sur ce point plus en détail dans la section suivante : cette information indique la présence de modifications temporaires dans la saisonnalité de la série.

On calcule également les corrélations entre composantes non-stationnaires différenciées :

$\text{corr}(\Delta_0^2 T_t, C_t)$	$\text{corr}(\Delta_0 Z_t^2, \Delta_0^2 Z_t^1)$	$\text{corr}(\Delta_\pi \Delta_{2\pi/3} S_t, \Delta_0^2 T_t)$	$\text{corr}(\Delta_\pi \Delta_{2\pi/3} S_t, C_t)$
-0.04	-0.70	0.03	0.03

La composante saisonnière apparaît peu corrélée avec les autres composantes. Ce qui est une hypothèse standard des procédures de désaisonnalisation semble vérifié ici empiriquement (on note qu'un test formel de cette hypothèse serait envisageable, cette corrélation dépendant seulement des coefficients du modèle ARMA estimé pour u_t). De même, les composantes transitoires et tendancielle sont faiblement corrélées. En revanche, les deux composantes de la tendance présentent une liaison négative très marquée.

Au total, il apparaît que M_{3t} admet une composante cyclique interprétable, et que **l'analyse conjoncturelle de cette variable peut être effectuée à partir de la tendance (fig. 19) et du cycle (fig. 16).**

Il est possible maintenant d'appliquer la méthodologie de la section 3 : on construit ainsi une évaluation plus lisse du cycle, en éliminant les fréquences associées à des phénomènes de période inférieures à 1,5 année. Pour l'estimation du modèle décrivant C_t^{BN} , on se limite à la famille des AR(p) pour $p \leq p_{\max} = 12$, le

retard p étant sélectionné sur la base du critère BIC.

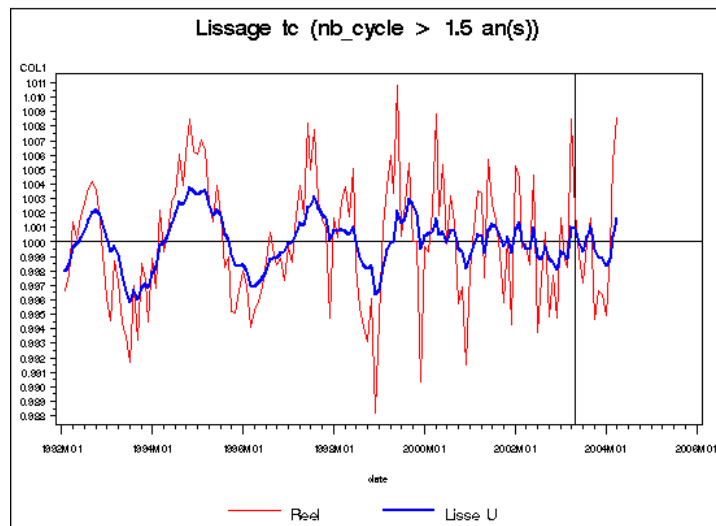


Fig.22. Lissage de C_t (filtre backward)

Dans le graphique ci-dessous, les deux séries sont normalisées par la densité spectrale estimée au point zéro de C_t^{BN} , $\widehat{f}_C(0)$. Ceci permet d'éliminer les effets d'échelle lors de la comparaison avec d'autres séries.

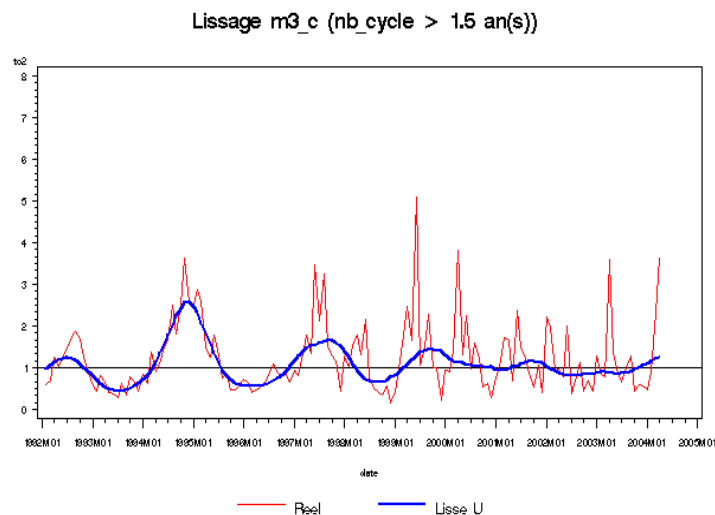


Fig.23. Lissage de C_t (filtre backward/forward)

"Reel" désigne C_t^{BN} ; la courbe de la fig. 23 désigne l'indicateur utilisable au mois le mois. La courbe fig. 24 désigne la série filtrée (23) obtenue par le filtre bilatéral. Elle est évidemment plus lisse, donc plus interprétable. En revanche, passée mai 2003 (trait vertical), cette courbe utilise des prévisions, elle est alors moins fiable.

On observe que l'amplitude de la composante cyclique apparaît moins prononcée depuis 2000. Ce phénomène peut être rapproché du calendrier de mise en place de l'Union monétaire. Cependant, la robustesse de ce résultat doit faire l'objet d'investigations complémentaires.

Enfin, il est possible de décrire le "poids" de la composante transitoire, et du cycle dans la série. On procède pour cela à une analyse de variance rudimentaire, en régressant le taux de croissance de la série CVS sur la constante et la composante C_t^{BN} (en logarithme):

$$\Delta \log (M3_t^{CVS}) = \alpha + \beta \log (C_t^{BN}) + l_t$$

Le coefficient R^2 de cette régression fournit la part de variance du glissement mensuel CVS "expliquée" par la composante transitoire. Une régression similaire avec pour variable explicative la variable lissée \tilde{C}_t (représentée fig. 23) fournit une estimation équivalente pour le cycle:

$$\Delta \log (M3_t^{CVS}) = \alpha + \beta \log (\tilde{C}_t) + \tilde{l}_t$$

Notons $R^2[C]$ le coefficient correspondant. **On trouve $R^2 = 26\%$ et $R^2[C] = 9\%$.**

Au mois le mois, on peut conduire une analyse classique en termes de contribution au taux de croissance mensuel de $M3_t$: en effet, ce taux est approximativement égal à $\Delta \log (M3_t)$, et:

$$\Delta \log (M3_t^{CVS}) = \Delta \log (T_t) + \Delta \log (S_t) + \Delta \log (C_t)$$

Par exemple, en avril 2004, le taux de croissance de M3 s'élève à **2,6 %**, qui se décompose selon :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1,8\%} \text{ attribuable à la composante saisonnière} \\ \mathbf{0,5\%} \text{ attribuable à la tendance} \\ \mathbf{0,3\%} \text{ attribuable à la composante transitoire} \end{array} \right.$$

On peut imaginer des indicateurs "d'alerte" à partir de ces contributions, par exemple, quand la part de la composante cyclique excède un certain seuil ou présente une persistance sur plusieurs échéances. Ce prolongement, associé aux problématiques de reporting régulier, pourra être étudié ultérieurement.

Enfin, nous concluons cette étude par un examen rapide des révisions intervenues entre les échéances d'avril 2004 et août 2004 ; en particulier nous comparons le taux de croissance mensuel issu de la CVS effectuée par SEATS (fig. 23c), avec celui résultant de la décomposition BN (fig.23b). Bien entendu, le modèle est réestimé pour chaque échéance; seule la structure des racines unitaires reste la même.

Sur la fig. 23b, on représente, conformément à la méthodologie décrite section 3.6:

- La série construite en août 2004 (label "(t,t)")
- La série construite en avril 2004 (label "(t-4,t-4)")
- La série construite en août 2004 avec les paramètres déterminés en avril (label "(t,t-4)")

On constate que ces trois courbes sont pratiquement confondues, ce qui indique une bonne stabilité de la méthode entre les deux échéances. En particulier, l'ordre du modèle AR appliqué à (u_t) reste le même ($p_{\text{opt}} = 9$).

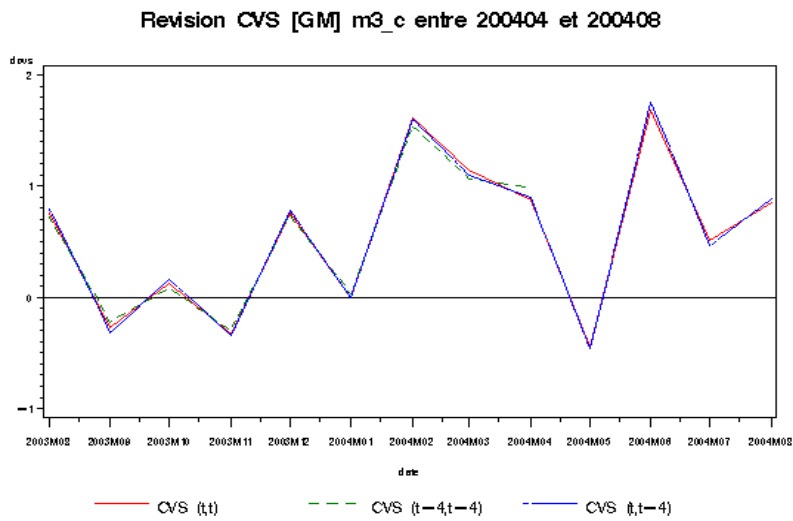


Fig.23b. Révisions CVS – BN

De même, le profil de la composante cyclique (lissage de la composante transitoire) est peu révisé:

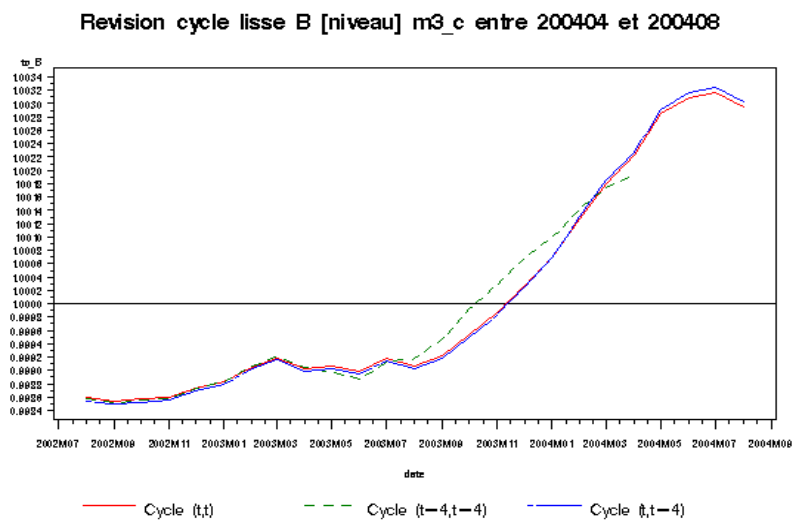


Fig.23c. Révisions Cycle – BN

En revanche, le profil de la CVS fournie par SEATS est moins stable:

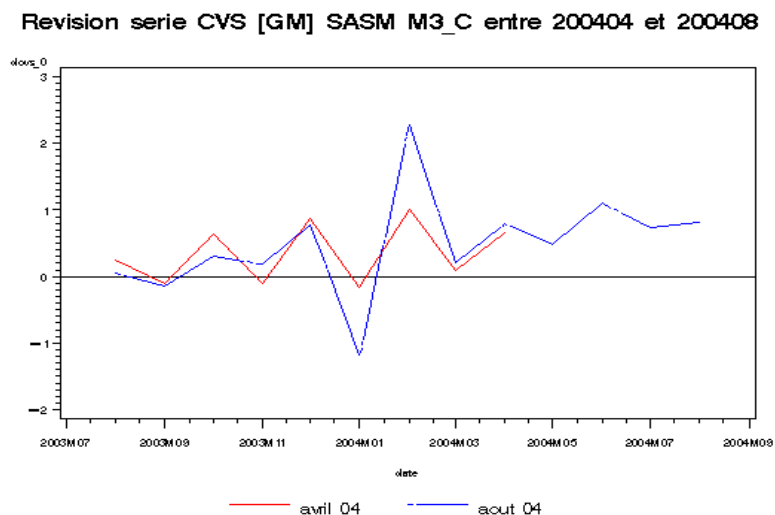


Fig.23d. Révisions CVS – SEATS

5.3 Procédures alternatives

5.3.1 Filtre à composante inobservables : SEATS

La procédure SEATS n'identifie pas de cycle pour M_{3t} , ce qui n'est pas surprenant compte tenu des enseignement de l'exercice simulé précédent. Par ailleurs, la composante saisonnière identifiée par ce logiciel a l'allure suivante :

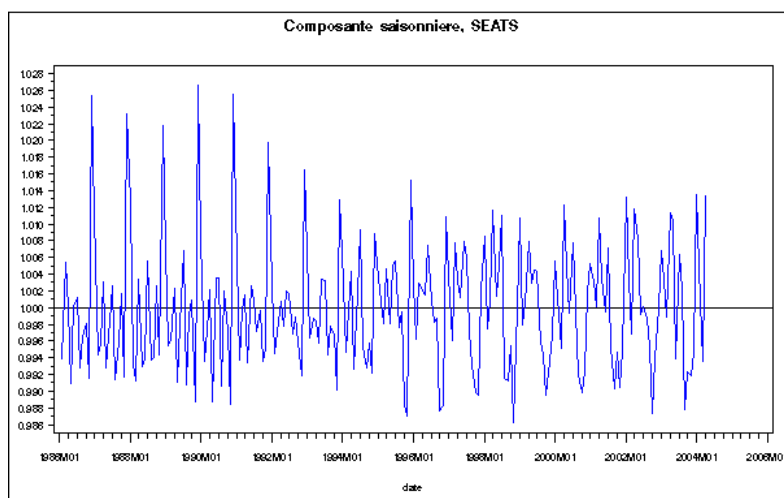


Fig.24. S_t , SEATS

La comparaison sur longue période avec la composante issue de la méthode BN est instructive:

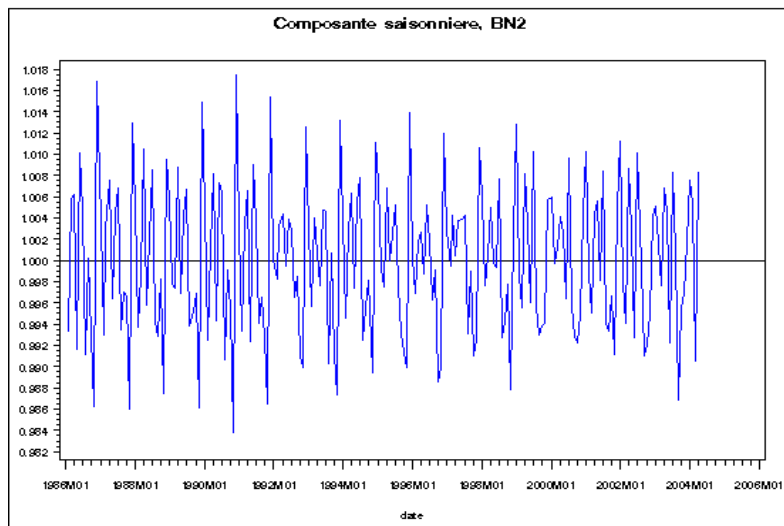


Fig.25. S_t , Beveridge – Nelson

On observe une rupture marquée dans le comportement saisonnier décrit par SEATS, celle-ci intervenant au cours des années 1992-1994, période marquée par des fluctuations de grande ampleur (crises de change, entrée en récession). Au contraire, la composante obtenue par la méthode BN apparaît plus stable jusqu'en 1999, avec une modification du comportement saisonnier à partir de cette date. On peut donc conclure qu'une partie de la volatilité de la série attribuable à sa composante cyclique se retrouve, dans le cas de SEATS, affectée aux autres composantes, soit ici la composante saisonnière.

5.3.2 Filtre uniforme : X12/HP

Il s'agit ici d'enchaîner un traitement classique de désaisonnalisation par le logiciel X12, et d'extraire ensuite⁹ à partir de la série CVS, la composante cyclique par le filtre de Hodrick-Prescott. Les deux procédures utilisent les paramètres par défaut (en particulier $\lambda = 1600$ pour le filtre HP). Le modèle ARIMA utilisé dans X12 est fixé après investigation à $(3,1,1)(0,1,1)$. Rappelons qu'en fonction de λ , la fonction de gain du filtre HP pour l'estimation du cycle a l'allure suivante sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ (le trait vertical désigne la

⁹X12 n'identifie pas de composante cyclique, seulement la "tendance-cycle", égale à la CVS moins l'irrégulier.

première fréquence saisonnière, $\pi/6$):

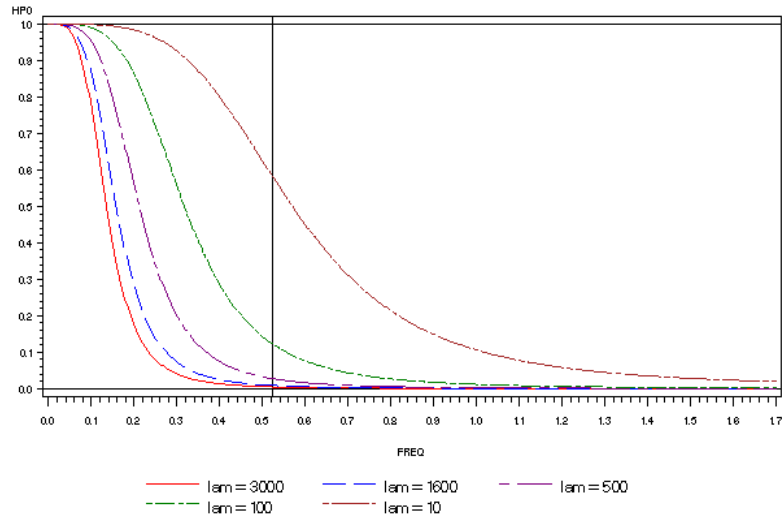


Fig.26. Gain du filtre HP en fonction de λ

Pour $\lambda = 1600$, les fréquences $\omega < \omega_l = 0,5058$ sont pratiquement toutes conservées; ω_l correspond à une période $T_l = 12,4$ mois, soit pratiquement la durée du premier cycle saisonnier (trait vertical sur la fig. 26).

On représente fig. 27 ci-dessous le cycle obtenu, ainsi que le cycle de la méthode BN :

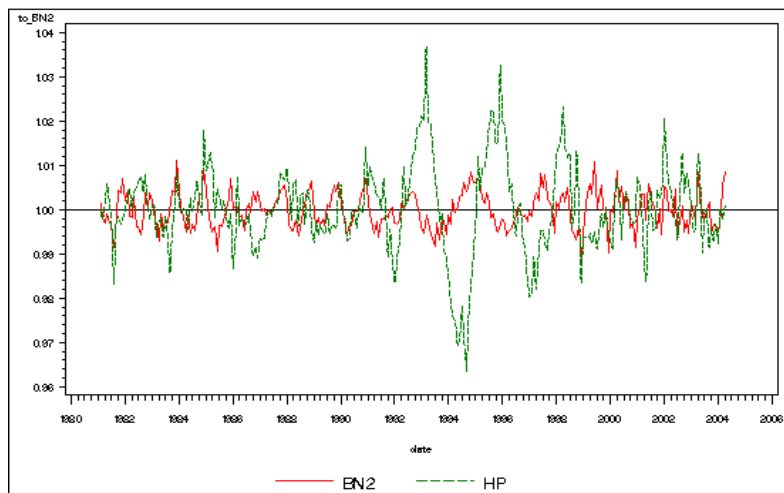


Fig.27. C_t par BN et X12/HP

La comparaison des deux courbes montre que, selon la méthode choisie, l'ampleur du cycle et la datation des points de retournements sont très différentes. Il nous semble qu'il est préférable de privilégier alors une méthode intégrant le moins d'a priori. Hors, ceux-ci sont nombreux dans l'usage combiné de X12 et HP: le choix des (nombreux) paramètres est dans une large mesure arbitraire, car reposant implicitement sur les valeurs par défaut.

La nécessité d'une validation statistique nous semble importante, dans la mesure où la théorie économique ne permet pas de situer a priori ces points de retournements par rapport à ceux de la production (l'indice de la production industrielle étudié ci-dessous, par exemple), comme en atteste l'importante littérature relative aux liens de causalité entre ces deux variables (voir par exemple Swanson (1998)). En revanche, pour certaines séries, on dispose d'une évaluation exogène des points de retournement : c'est l'exemple que nous traitons maintenant.

6 Un benchmark : le PIB nominal US

Cette série trimestrielle est disponible en données brutes pour la période 1960-2002. On dispose par ailleurs de la datation des points de retournement effectuée par le NBER. Rappelons que cette chronique repose sur l'usage et l'interprétation par un collège d'experts de multiples données. Les arguments utilisés pour conclure à une entrée ou sortie de récession sont publiés sur le site du NBER. Cette procédure n'a donc rien d'automatique, et fournit une base de référence utilisable à son tour pour évaluer la qualité des nombreuses méthodes d'extraction du cycle. Ainsi, chacune de ces méthodes se doit de passer au "banc d'essai" de cette série, et prouver qu'elle permet au moins de retrouver la plupart des dates proposées par le NBER (voir par exemple Canova (1998)).

Le graphique ci-dessous montre pour la période considérée le glissement annuel du PIB, et les périodes de récession identifiées par le NBER (zones grisées). On remarque que, parmi les multiples épisodes au cours desquels le glissement annuel est en baisse sur plusieurs trimestres consécutifs, seuls quelques uns sont

associés à des récessions.

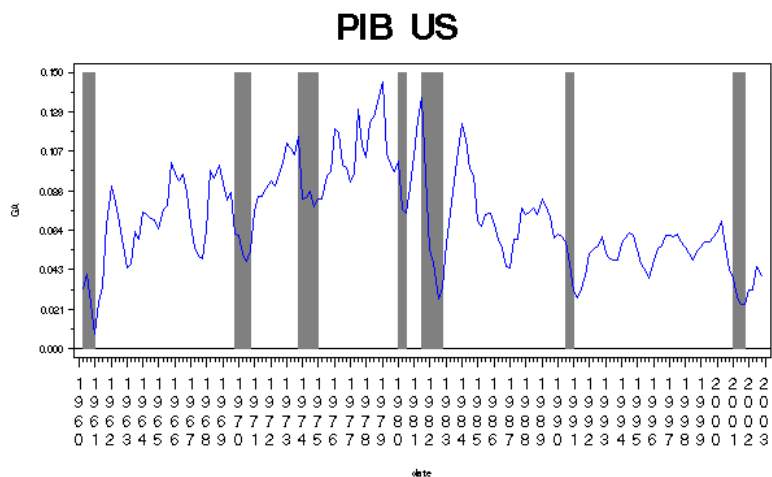


Fig.28. PIB nominal, données brutes

On applique la méthodologie "semi-paramétrique" à cette série. Les tests de racine unitaire conduisent à retenir l'hypothèse H_d^2 avec:

$$\Theta_1 = \{0, \pi\}, \quad \Theta_2 = \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$

On trouve un retard autorégressif $p_{opt} = 6$, et une composante transitoire dont la densité spectrale a l'allure suivante:

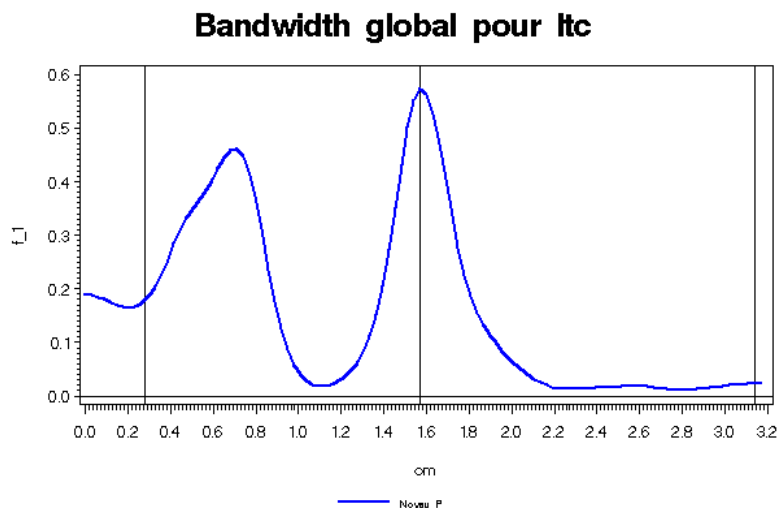


Fig.29. Spectre de la composante transitoire

Cette composante présente un comportement saisonnier stationnaire, donc peu persistant (maximum à la fréquence $\omega = \pi/2$), ainsi qu'un comportement cyclique dont la période est comprise entre 9 et 10 trimestres, soit 2,5 années.

On vérifie ensuite que les périodes de récession déterminées par le NBER correspondent bien à des phases descendantes du cycle. Ceci est particulièrement clair sur la série lissée selon le filtre bilatéral:

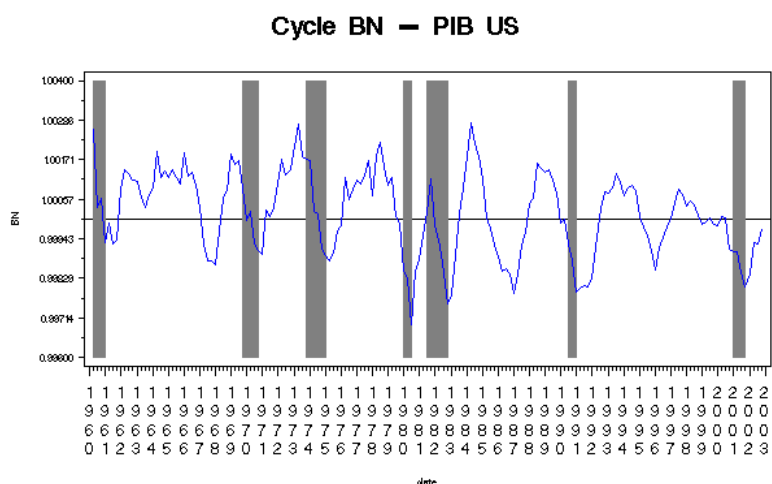


Fig.30. Composante transitoire

Ce résultat conforte donc notre approche, dans la mesure où l'analyse du NBER se fonde majoritairement sur des données CVS, alors que la série traitée ici est brute.

7 Application empirique : l'indice de la production industrielle en France

La série brute, non-corrigée des effets de calendrier est disponible sur la période janvier 1990 à avril 2004:

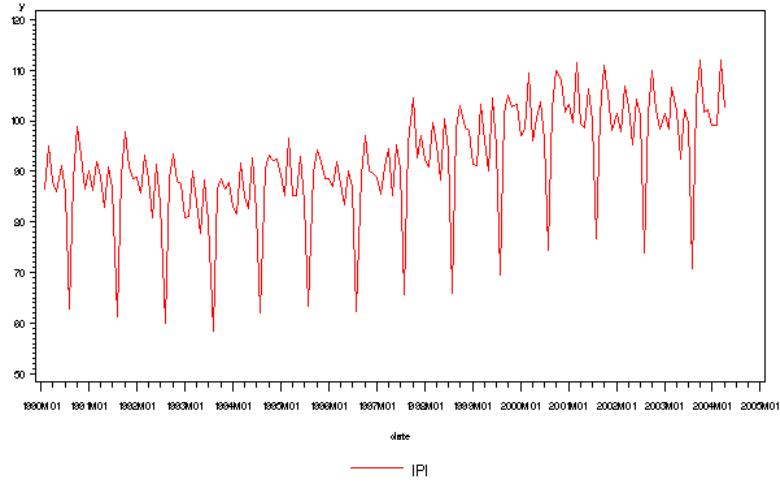


Fig.31. IPI : indice brut

Les tests de racine unitaire conduisent à retenir pour $y_t = \log(IPI_t)$ l'hypothèse \mathbf{H}_d^1 avec:

$$\Theta_1 = \{0\}, \quad \Theta_2 = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi \right\}$$

Le traitement paramétrique du résidu u_t s'effectue par le modèle ARMA:

$$(1 - \alpha_1 \mathbf{B}^3) (1 - \alpha_2 \mathbf{B}^6) (\tilde{y}_t - d_t) = (1 + \theta_1 \mathbf{B}) \varepsilon_t$$

Dans ce modèle, la composante déterministe d_t comporte tous les termes associés à Θ_2 . Ceux-ci apparaissent en effet tous significatifs. Pour simplifier l'analyse, aucune correction calendaire n'est incorporée au terme d_t .

Contrairement aux résultats obtenus pour l'agrégat M3, les deux décompositions (paramétriques et semi-

paramétriques, avec $p_{\text{opt}} = 2$) donnent ici des résultats similaires:

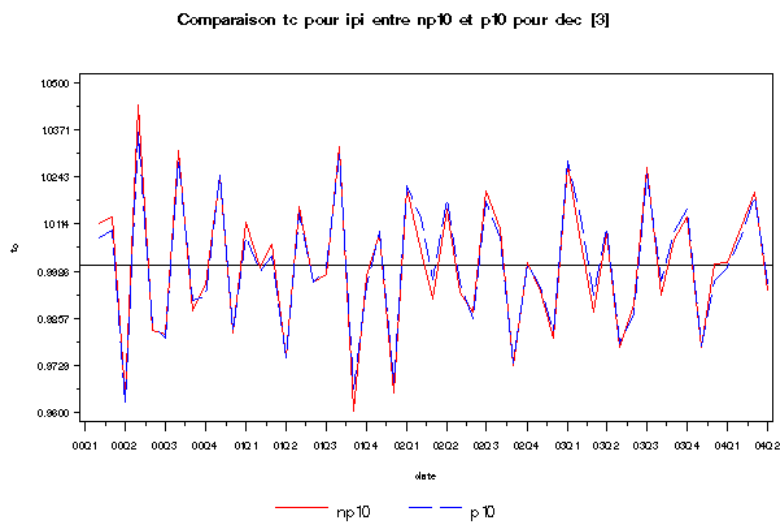


Fig.32. Composantes transitoires

On retient par exemple la décomposition "paramétrique", décrite par les graphiques ci-dessous.

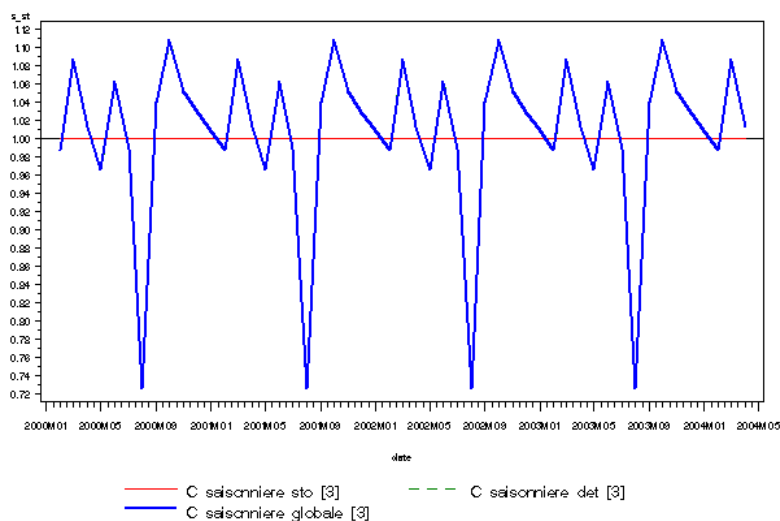


Fig. 33. Composante saisonnière

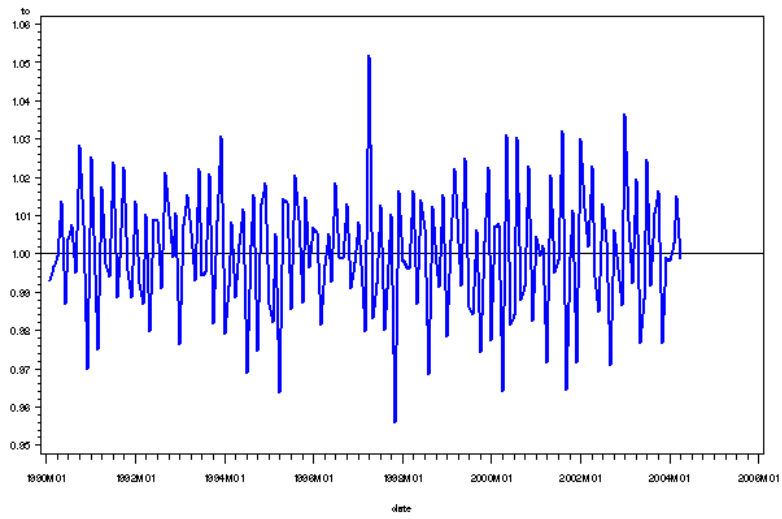


Fig. 34. Composante transitoire

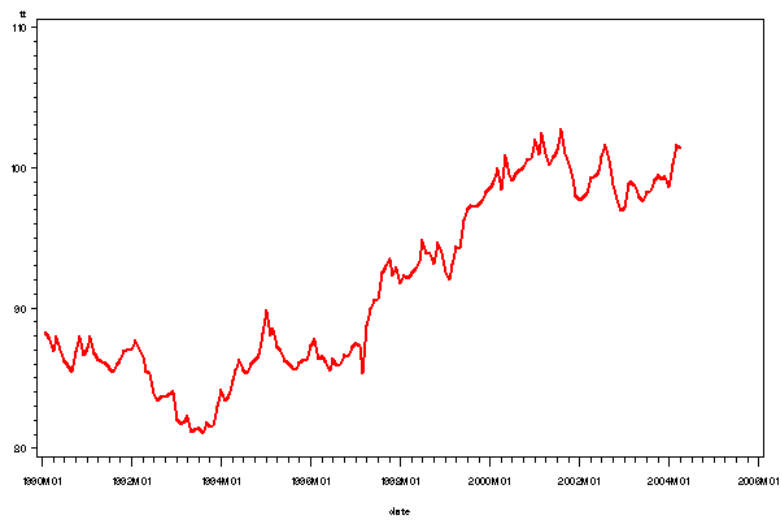


Fig.35. Tendance

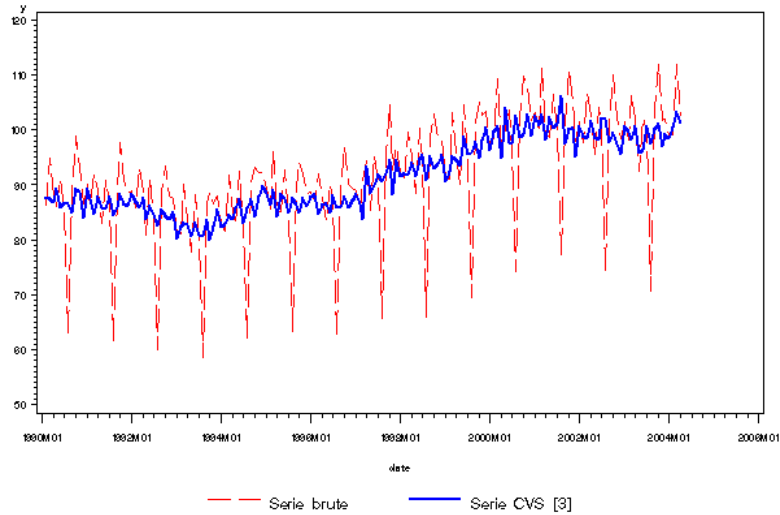


Fig.36. Série CVS

On observe sur cette série que la saisonnalité transite uniquement par les facteurs déterministes, ce qui découle directement des résultats des tests de racine unitaire. En conséquence, les facteurs saisonniers sont constants. Ce résultat n'est pas surprenant, compte tenu de la taille relativement modeste de l'échantillon (15 ans), et de la régularité remarquable de la saisonnalité de la série (en particulier, le "creux" du mois d'août). Seule une période d'observation plus longue permettrait d'observer une saisonnalité évolutive.

La dynamique de la composante transitoire est entièrement dominée par un pic à la fréquence $\omega_{j_0} = 2\pi \times \frac{30.4375}{7} [2\pi]$ traduisant l'existence de régularités calendaires non-saisonniers.

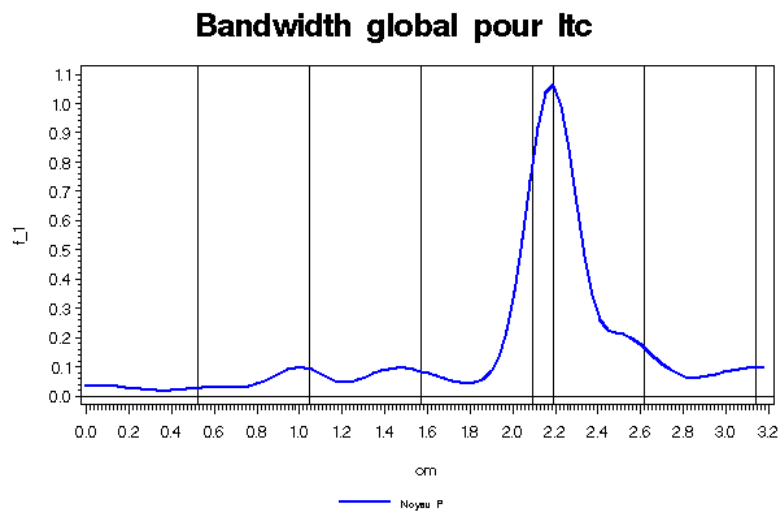


Fig.37. Spectre de C_t

Le lissage de la composante "cyclique" permet d'éliminer cette fréquence, et conduit à la courbe suivante:

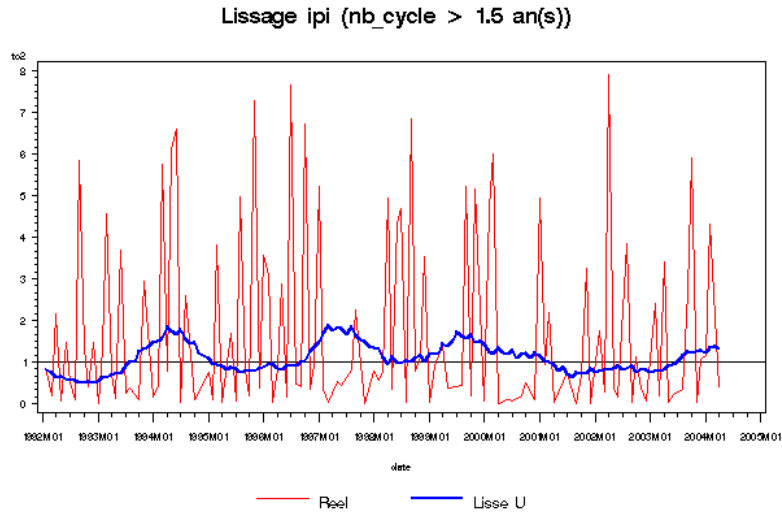


Fig.38. Lissage de C_t (filtre backward/forward)

Le cycle filtré permet de mettre en évidence la composante de période $34,4 \simeq 2,8$ ans, ce qui est sensiblement du même ordre de grandeur que pour M_{3t} .

L'analyse conjoncturelle de cette variable pourra donc s'effectuer à partir du cycle et de la tendance (fig. 35), cette composante ne nécessitant aucun lissage supplémentaire. On remarque d'ailleurs que le filtre (23) n'est pas défini pour une série non-stationnaire¹⁰.

En terme de part de variance expliqué du glissement mensuel CVS, on trouve :

- pour la composante transitoire : $\mathbf{R}^2 = 84 \%$
- pour la composante cyclique : $\mathbf{R}^2[\mathbf{C}] = 2 \%$.

La forte contribution des effets calendaires (conservés dans la série) explique la valeur élevée obtenue pour \mathbf{R}^2 .

En guise d'illustration, un premier rapprochement des composantes cycliques estimées pour M_3 et IPI_t

¹⁰Le filtre "officiel" de Baxter-King comporte le terme $(1 - \mathbf{B})(1 - \mathbf{F})$, $\mathbf{F} = \mathbf{B}^{-1}$ étant l'opérateur "forward" et peut être utilisé pour des séries intégrées au plus d'ordre deux à la fréquence $\omega = 0$, mais stationnaire aux autres fréquences.

conduit à:

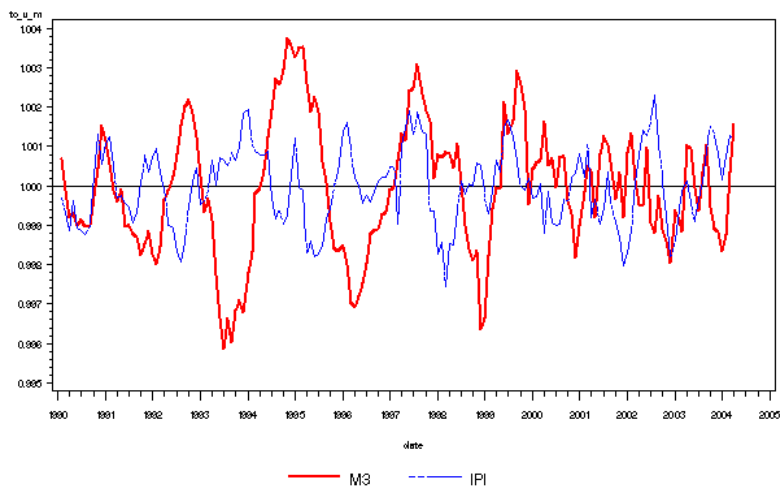


Fig.39. Cycles de M_3 et IPI

Une analyse spectrale rapide de ces deux courbes (fig. 40) indique que le cycle de M_3 est en retard de 2 à 3 mois sur le cycle de la production industrielle¹¹. En raison de sa fragilité, ce résultat doit faire l'objet d'analyses plus poussées. Par exemple, un exercice de bootstrap bivarié permettrait d'en assurer la validité.

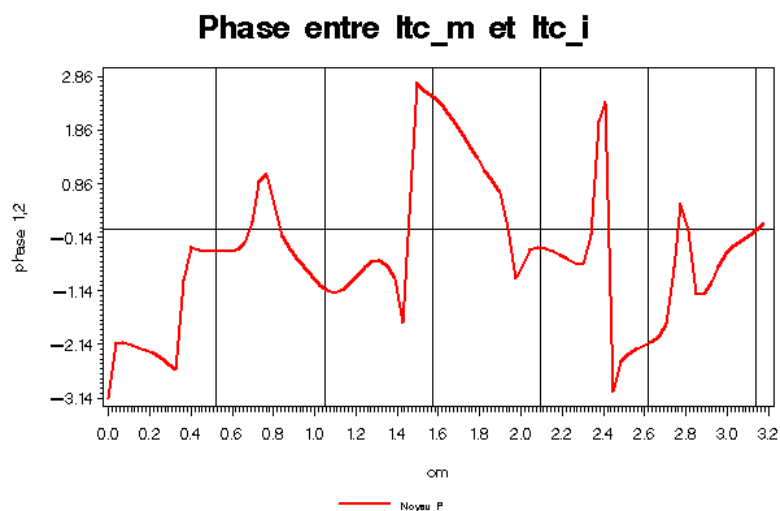


Fig.40. Phase entre M_3 et IPI

¹¹Ce résultat est obtenu en effectuant une régression locale autour de la fréquence cyclique ω_c , c'est à dire ici pour $0,1 \leq \omega \leq 0,3$ de $ph(\omega)$ sur la constante et ω . Le "délai" est le coefficient de ω .

8 Conclusion

Ce papier illustre à partir de quelques exemples les potentialités de l'approche de Beveridge-Nelson généralisée pour la décomposition d'une série temporelle. En particulier, les composantes estimées sont définies sans ambiguïté, et le processus ayant conduit à l'estimation de ces composantes, quoique complexe, peut-être décrit de façon complètement transparente.

Parmi les enseignements des applications empiriques réalisées, deux nous semblent particulièrement instructifs:

- L'approche paramétrique pour l'estimation des composantes apparaît relativement fragile : en particulier, la sensibilité des résultats aux erreurs de spécification du modèle ARMA sous-jacent conduit à privilégier l'approche semi-paramétrique.

- Le cycle doit être retraité pour fournir un signal interprétable. Ce signal peut présenter des divergences importantes avec l'estimation résultant de la combinaison d'un filtre de désaisonnalisation (X12), et de décomposition tendance-cycle (HP).

Ce travail admet un prolongement naturel sous la forme d'un véritable exercice de simulation qui permettrait une véritable comparaison des approches concurrentes d'estimation du cycle, notamment BN et X12-HP. Il serait également intéressant d'examiner la robustesse de la méthode pour des spécifications s'écartant des hypothèses du modèle (modèles hétéroscédastiques, dynamiques non-linéaires), et de vérifier si l'on obtient malgré tout un signal interprétable.

À ce stade, les indicateurs proposés dans cette étude viennent enrichir la boîte à outils des conjoncturistes. Leur usage à des fins de reporting doit cependant être envisagé avec précaution. En effet, la méthodologie est par essence statistique et n'intègre pas à ce stade les contraintes liées à l'interprétation des résultats. La difficulté provient également de l'absence de consensus relatif à l'identification des cycles qui gouvernent les grands indicateurs macroéconomiques sur le modèle des travaux du NBER aux États-Unis. Pour autant, l'estimation conjointe selon une méthodologie unifiée de la tendance, du cycle et de la saisonnalité s'avère particulièrement prometteur.

9 Annexe : l'analyse spectrale

L'analyse spectrale des séries temporelles est l'équivalent de l'analyse de Fourier des fonctions périodiques. Rappelons qu'une fonction $f(t)$ définie sur \mathbb{R} , périodique de période T admet sous des conditions de régularité assez générales la décomposition:

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)\} \quad (37)$$

avec a_k et b_k coefficients de Fourier, et $\omega_k = k\omega$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ étant la fréquence fondamentale (ou pulsation) du phénomène périodique. Les ω_k représentent pour $k \geq 2$ les harmoniques de ω .

On considère maintenant une variable aléatoire discrète stationnaire (u_t) d'espérance nulle pour laquelle on espère obtenir une écriture équivalente à (37); nous supposons dans un premier temps (u_t) périodique, de période (minimale) T :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, u_{t+T} = u_t$$

Deux différences majeures surgissent :

a] les propriétés stochastiques de (u_t) implique que les coefficients de Fourier seront également aléatoires, d'espérance nulle.

b] l'indice t est discret, au lieu d'être continu : ceci implique que seules les fréquences $\omega_k \in [0, \pi]$ seront présentes dans l'écriture de u_t :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, u_t = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor} \{A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)\} \quad (38)$$

a] implique maintenant que $\mathbb{E}(A_k) = \mathbb{E}(B_k) = 0$.

En économie, les phénomènes modélisés par des variables aléatoires ne sont jamais rigoureusement périodiques. L'écriture (38) doit être généralisée, de manière à inclure toutes les fréquences possibles ω . Comme l'espace des temps est discret, cet ensemble se réduit à $[0, \pi]$ (pour un processus en temps continu, l'espace serait \mathbb{R}). On obtient alors, heuristiquement, une description de u_t comme superposition de signaux périodiques élémentaires associés chacun à la fréquence fondamentale $\omega_l = \frac{2l\pi}{L}$, L étant un entier (suffisamment grand) paramétrant la discrétisation de $[0, \pi]$ par les ω_l :

$$u_t \simeq \frac{A_0}{2} + \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{t}{L} \rfloor} \{A_l d\omega_l \cos(\omega_l t) + B_l d\omega_l \sin(\omega_l t)\}$$

Cette écriture est une approximation de la représentation intégrale stochastique, obtenue lorsque $L \rightarrow +\infty$

:

$$u_t = \int_0^\pi \cos(\omega t) dA(\omega) + \int_0^\pi \sin(\omega t) dB(\omega)$$

Il s'agit de la **représentation spectrale** de (u_t) qui s'écrit sous forme équivalente plus compacte:

$$u_t = \int_{-\pi}^\pi e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (39)$$

$dZ(\omega)$ est une variable aléatoire qui représente le poids de la composante périodique, de fréquence ω dans la décomposition de u_t sur les fréquences figurant dans $[-\pi, \pi]$. La relation (39) est la représentation spectrale de (u_t) .

On a $\mathbb{E}\{dZ(\omega)\} = 0$ puisque $\mathbb{E}(u_t) = 0$. On montre de plus qu'il existe en général une fonction f positive vérifiant :

$$\text{var}\{dZ(\omega)\} = f(\omega) d\omega$$

Il en résulte la décomposition de la variance totale de (u_t) :

$$\text{var}\{u_t\} = 2 \times \int_0^\pi f(\omega) d(\omega) \quad (40)$$

(39) et (40) constituent les éléments fondamentaux de l'analyse en fréquence de (u_t) : les valeurs élevées de f identifient en effet les fréquences ω prépondérantes dans la volatilité de u_t . Chaque fréquence ω_* ainsi isolée peut ensuite être reliée à un phénomène particulier en fonction de la valeur de la période associée, $T_* = \frac{2\pi}{\omega_*}$.

On montre ensuite que toute variable aléatoire \mathbf{X} appartenant à l'espace linéaire engendré par les $(u_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ admet une unique représentation intégrale de la forme :

$$\mathbf{X} = \int_{-\pi}^\pi n_X(\omega) dZ(\omega)$$

$n_X(\cdot)$ est une fonction à valeurs complexes de carré intégrable sur $[-\pi, \pi]$ pour la mesure $f(\omega) d(\omega)$:

$$\int_{-\pi}^\pi |n_X(\omega)|^2 f(\omega) d\omega < +\infty$$

Cette fonction est appelée **caractéristique spectrale** de \mathbf{X} . Lorsque $X = u_t$, on retrouve la représentation spectrale de u_t , avec $n_X(\omega) = e^{it\omega}$. Un des intérêts de cette approche est de pouvoir transformer un problème relatif à des variables aléatoires (ici les u_t et toute série temporelle qui s'en déduit linéairement) en un problème faisant intervenir un espace fonctionnel (les fonctions de carré intégrable sur $[-\pi, \pi]$ pour une mesure particulière) pour lequel on dispose de techniques particulièrement puissantes.

9.1 Estimation non-paramétrique du spectre

Pour une fonction h à valeurs complexes définie et continue sur $[-\pi, \pi]$, on notera $|h|_\infty = \sup_{\omega \in [-\pi, \pi]} |h(\omega)|$.

Soit $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$, $N = \lceil \frac{T}{2} \rceil$ et $I_u(\omega)$ est le périodogramme de $(u_t)_{1 \leq t \leq T}$. On suppose (u_t) stationnaire vérifiant les hypothèses de la section ???. Soit $\widehat{f}_u(\cdot)$ un estimateur à noyau de la densité spectrale f_u de (u_t) .

Il est de la forme (Brillinger (1981)):

$$\widehat{f}_u(\omega; \mathbf{b}_T) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{T-1} K_{\mathbf{b}_T}(\omega - \omega_k) I_u(\omega_k) \quad (41)$$

Le paramètre décrivant la taille de la fenêtre est \mathbf{b}_T , il vérifie les conditions usuelles:

$$\mathbf{b}_T = o(1) \text{ et } T\mathbf{b}_T \rightarrow \infty$$

Le noyau $K_{\mathbf{b}}(x)$ est équivalent à $\mathbf{b}^{-1}K(x\mathbf{b}^{-1})$, avec $K(\cdot)$ fonction positive, symétrique, régulière (de classe C^2) vérifiant

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x) dx = 1, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 K(x) dx < \infty$$

Le comportement de $K_{\mathbf{b}}$ est asymptotiquement celui d'une masse de Dirac en zéro : concentration de la masse de l'origine lorsque $\mathbf{b} \rightarrow 0$.

Soit également la transformée de Fourier de $K_{\mathbf{b}}$:

$$w_{\mathbf{b}}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} K_{\mathbf{b}}(x) dx$$

En général, $w_{\mathbf{b}}(u) \simeq w(u\mathbf{b}_T)$ avec w transformée de Fourier de K , et w est à support compact. Notons qu'il est équivalent de connaître w ou K .

\widehat{f}_X est la version "discrète" de l'estimateur "théorique" (41):

$$\widetilde{f}_u(\omega; \mathbf{b}_T) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\mathbf{b}_T}(\omega - \lambda) I_u(\lambda) d\lambda \quad (42)$$

On a l'écriture équivalente:

$$\widetilde{f}_u(\omega; \mathbf{b}_T) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| < T} e^{-ik\omega} \widehat{\gamma}(k) w_{\mathbf{b}_T}(k)$$

avec $\widehat{\gamma}(\cdot)$ fonction de covariance empirique de $(u_t)_{1 \leq t \leq T}$. On renforce l'hypothèse de régularité de l'innovation (ε_t) :

$$\mathbf{H}_{\varepsilon} : (\varepsilon_t) \text{ i.i.d, } \mathbb{E}(\varepsilon_t^8) < \infty$$

Le paramètre \mathbf{b}_T est essentiel : il décrit le compromis biais/variance retenu pour l'estimateur. En revanche, le choix du noyau w est moins déterminant. On retient ici le noyau de Parzen, décrit par l'une des deux relations ci-dessous:

$$w(u) = \begin{cases} 1 - 6u^2 + 6|u|^3 & \text{pour } |u| \leq 1/2 \\ 2(1 - |u|)^3 & \text{pour } 1/2 \leq |u| \leq 1 \\ 1 - 6u^2 + 6|u|^3 & \text{pour } |u| > 1 \end{cases} \quad (43)$$

$$K_{\mathbf{b}}(x) = \frac{3\mathbf{b}^3}{8\pi} \left(\frac{\sin(x/4\mathbf{b})}{\frac{1}{2}\sin(x/2)} \right)^4 \times \left\{ 1 - \frac{2}{3} \sin^2(x/2) \right\} \quad (44)$$

D'autres noyaux ont été testés (Bartlett, Bartlett-Priestley), sans que les résultats soient significativement différents.

Pour juger de la qualité globale de $\widetilde{f}_u(\omega)$ pour $\omega \in [0, \pi]$, on utilise le critère classique:

$$IMSE(\mathbf{b}_T) = \int_0^{\pi} \frac{\mathbb{E} \left(\widehat{f}_u(\omega; \mathbf{b}_T) - f_u(\omega) \right)^2}{f_u(\omega)} d\omega \quad (45)$$

Sous $\mathbf{H}_{\varepsilon}, \mathbf{H}_q$, on sait que le choix optimal pour \mathbf{b}_T est de la forme:

$$\mathbf{b}_T = \frac{1}{\mathbf{c}T^y}$$

avec $\mathbf{c} > 0$ et y dépendant de la régularité du noyau w au voisinage de zéro. Typiquement, $y = \frac{1}{5}$ pour le noyau de Parzen ou de Bartlett-Priestley, tandis que $y = \frac{1}{3}$ pour le noyau de Bartlett.

Ensuite, l'estimation du \mathbf{c} optimal peut être effectuée par minimisation sur un intervalle $[\underline{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{c}}]$ du critère discrétisé (Robinson (1991)):

$$L(\mathbf{c}) = \sum_{j=1}^T \left\{ \log \widehat{f_{u,j}} \left(\omega_j; \frac{1}{\mathbf{c}T^y} \right) + \frac{I_u(\omega_j)}{\widehat{f_{u,j}} \left(\omega_j; \frac{1}{\mathbf{c}T^y} \right)} \right\} \quad (46)$$

avec $\omega_j = \frac{\pi j}{T}$ (on se restreint à l'intervalle $[0, \pi]$), et $\widehat{f_{u,j}}$ l'estimateur modifié par rapport à (41):

$$\widehat{f_{u,j}}(\omega; \mathbf{b}_T) = \frac{1}{T} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j \text{ et } k \neq T-j}}^{T-1} K_{\mathbf{b}_T}(\omega - \omega_k) I_u(\omega_k) \quad (47)$$

L'objet de cette modification est d'assurer que le problème (46) n'est pas trivial. L'estimateur de la densité spectrale obtenu avec le \mathbf{c}_{opt} ainsi déterminé est alors uniformément convergent (Robinson (1991)), et asymptotiquement normal. En notant $\mathbf{b}_T^{\text{opt}} = \frac{1}{\mathbf{c}_{\text{opt}}T^y}$:

$$\left| \widehat{f_u}(\cdot, \mathbf{b}_T^{\text{opt}}) - f_u \right|_{\infty} = O_p \left\{ (T\mathbf{b}_T^{\text{opt}})^{-\frac{1}{2}} \right\} \quad (48)$$

Ensuite, pour tout $\omega \in [0, \pi]$

$$\sqrt{T\mathbf{b}_T^{\text{opt}}} \left[\widehat{f_u}(\omega, \mathbf{b}_T^{\text{opt}}) - f_u(\omega) \right] \Rightarrow \mathbf{N} \left[0, \{1 + \delta_{\{0,p\}}(\omega)\} \sigma^2(K) f_u^2(\omega) \right] \quad (49)$$

avec $\sigma^2(K)$ facteur ne dépendant que du noyau K (ou de manière équivalente, w) retenu. L'expression de la variance asymptotique indique tout de suite que la statistique suivante est asymptotiquement pivotale¹²:

$$\zeta_T = \sqrt{T\mathbf{b}_T^{\text{opt}}} \left[\log \widehat{f_u}(\omega, \mathbf{b}_T^{\text{opt}}) - \log f_u(\omega) \right]$$

Il est alors possible d'utiliser l'exercice de bootstrap pour construire une meilleure approximation de la loi à distance finie de cet estimateur que la loi normale asymptotique (Kreiss (1988)). Il suffit de construire ζ_T^b pour chaque échantillon bootstrap ($b = 1, \dots, B$). Notons $q(\alpha)$ le quantile empirique d'ordre α de la distribution des $\{\zeta_T^b\}_{1 \leq b \leq B}$, c'est à dire:

$$q(\alpha) = \zeta_T^{(\text{int}[\alpha B])}$$

avec $\{\zeta_T^{(b)}\}$ statistique d'ordre construite à partir de $\{\zeta_T^b\}$. Un intervalle de confiance bootstrap de niveau $1 - \alpha$ pour $\log f_u(\omega)$ est alors:

$$\mathbf{IC}(\omega; 1 - \alpha) = \left[\frac{q\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{T\mathbf{b}_T^{\text{opt}}}} + \log \widehat{f_u}(\omega, \mathbf{b}_T^{\text{opt}}); \frac{q\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{T\mathbf{b}_T^{\text{opt}}}} + \log \widehat{f_u}(\omega, \mathbf{b}_T^{\text{opt}}) \right] \quad (50)$$

On en déduit, par passage à l'exponentielle un intervalle de confiance pour $f_u(\omega)$.

Pour limiter les coûts de traitement, on impose le choix de $\mathbf{b}_T^{\text{opt}}$ obtenu sur l'échantillon initial pour le calcul de $\widehat{f_u}$ lors de chaque réplique bootstrap.

¹²Nous avons supposé que la densité spectrale ne s'annulait jamais.

References

- [1] **BAXTER M., KING R.G.**, (1999), Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series, *The Review of Economic and Statistics*, 91(4), 575-593
- [2] **BEVERIDGE D., NELSON C.R.** (1981), A New Approach to Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transitory Component with Particular Attention to Measurement of the 'Business Cycle', *Journal of Monetary Economics*, 7, 151-174
- [3] **BRILINGER D.R.** (1981), Time Series Analysis: Data analysis and Theory, *Holden Day, San Francisco*
- [4] **BROCKWELL P.J., DAVIES R.A.** (1991), Time Series : Theory and Methods, *Springer Verlag*
- [5] **BÜHLMANN P.** (1996), Confidence Regions for Trends in Time Series : A Simultaneous Approach with a Sieve Bootstrap. *Tech. Report, Dept. of Statistics, Univ of California, Berkeley*
- [6] **BÜHLMANN P.** (1997), Sieve Bootstrap for Time Series, *Bernoulli*, 3, 123-148
- [7] **CANOVA F.** (1998), Detrending and Business Cycle Facts, *Journal of Monetary Economics*, 41, 475-512
- [8] **CANOVA F., HANSEN B.E.** (1995), Are Seasonal Patterns Constant Over Time? A Test of Seasonal Stability, *Journal of Business and Economic Statistics*, 13, 237-252
- [9] **CLEVELAND W.S., DEVLIN S.J.** (1980), Calendar Effects in Monthly Time Series: Detection by Spectrum Analysis and Graphical Methods, *Journal of the American Statistical Association*, 75, 487-496
- [10] **GHYSELS E., GRANGER C.W.J., SIKLOS P.L.**, (1996), Is Seasonal Adjustment a linear or non-linear Data-Filtering Process ?, *Journal of Business and Economics Statistics*, 14, 374-386
- [11] **GREGOIR S.** (1994), Multivariate Time Series With Various Hidden Unit Roots. Part 1: Integral Operator Algebra and Representation Theorem, *Econometric Theory*, 15,4, 435-468
- [12] **HYLLEBERG S., ENGLE R.F., GRANGER C.W.J., YOO B.S.** (1990), Seasonal Integration and Cointegration ?, *Journal of Econometrics*, 44, 215-238
- [13] **KREISS J-P.**, (1988), Asymptotic Properties of Residual Bootstrap for Autoregressions, *Working Paper, Institut für Mathematische Stokastik Technische, Universität Braunschweig*
- [14] **LACROIX R.**, (2008), Analyse Conjoncturelle de Données Brutes et estimation de Cycles. Partie I : estimation et tests, *Working Paper, Banque de France, NER-R # xxx*
- [15] **LACROIX R., MAURIN L.** (2008), Désaisonnalisation des Agrégats Monétaires : Mise en place d'une Chaîne Rénovée, *Banque de France, NER-R # xxx*
- [16] **LI Y.** (1998), Low-pass Filtered Least Squares Estimators of Cointegrating Vectors, *Journal of Econometrics*, 85, 289-316
- [17] **MIR A.M., OSBORN D.R.** (2004), Seasonal Adjustment and the Detection of Business Cycle

Phases, *European Central Bank, Working Paper*.

- [18] **ROBINSON P.M.** (1991), Automatic Frequency Domain Inference on Semiparametric and Nonparametric Models, *Econometrica*, 59, 1329-1363
- [19] **SWANSON N. R.** (1998), Money and Output Viewed through a Rolling Window, *Journal of Monetary Economics*, 41, 455-473

Notes d'Études et de Recherche

183. J. Coffinet and S. Gousteron, "Euro Area Market Reactions to the Monetary Developments Press Release," October 2007.
184. C. Poilly, "Does Money Matter for the Identification of Monetary Policy Shocks: A DSGE Perspective," October 2007.
185. E. Dhyne, C. Fuss, H. Pesaran and P. Sevestre, "Lumpy Price Adjustments: a Microeconometric Analysis," October 2007.
186. R. Cooper, H. Kempf and D. Peled, "Regional Debt in Monetary Unions: Is it Inflationary?," November 2007.
187. M. Adanero-Donderis, O. Darné and L. Ferrara, « Deux indicateurs probabilistes de retournement cyclique pour l'économie française », Novembre 2007.
188. H. Bertholon, A. Monfort and F. Pegoraro, "Pricing and Inference with Mixtures of Conditionally Normal Processes," November 2007.
189. A. Monfort and F. Pegoraro, "Multi-Lag Term Structure Models with Stochastic Risk Premia," November 2007.
190. F. Collard, P. Fève and J. Matheron, "The Dynamic Effects of Disinflation Policies," November 2007.
191. A. Monfort and F. Pegoraro, "Switching VARMA Term Structure Models - Extended Version," December 2007.
192. V. Chauvin and A. Devulder, "An Inflation Forecasting Model For The Euro Area," January 2008.
193. J. Coffinet, « La prévision des taux d'intérêt à partir de contrats futures : l'apport de variables économiques et financières », Janvier 2008.
194. A. Barbier de la Serre, S. Frappa, J. Montornès et M. Murez, « La transmission des taux de marché aux taux bancaires : une estimation sur données individuelles françaises », Janvier 2008.
195. S. Guilloux and E. Kharroubi, "Some Preliminary Evidence on the Globalization-Inflation nexus," January 2008.
196. H. Kempf and L. von Thadden, "On policy interactions among nations: when do cooperation and commitment matter?," January 2008.
197. P. Askenazy, C. Cahn and D. Irac "On "Competition, R&D, and the Cost of Innovation," February 2008.
198. P. Aghion, P. Askenazy, N. Berman, G. Cette and L. Eymard, "Credit Constraints and the Cyclicity of R&D Investment: Evidence from France," February 2008.
199. C. Poilly and J.-G. Sahuc, "Welfare Implications of Heterogeneous Labor Markets in a Currency Area," February 2008.
200. P. Fève, J. Matheron et J.-G. Sahuc, « Chocs d'offre et optimalité de la politique monétaire dans la zone euro », Février 2008.

201. N. Million, « Test simultané de la non-stationnarité et de la non-linéarité : une application au taux d'intérêt réel américain », Février 2008.
202. V. Hajivassiliou and F. Savignac, "Financing Constraints and a Firm's Decision and Ability to Innovate: Establishing Direct and Reverse Effects," February 2008.
203. O. de Bandt, C. Bruneau and W. El Amri, "Stress Testing and Corporate Finance," March 2008.
204. D. Irac, "Access to New Imported Varieties and Total Factor Productivity: Firm level Evidence From France," April 2008.
205. D. Irac, "Total Factor Productivity and the Decision to Serve Foreign Markets: Firm Level Evidence From France," April 2008.
206. R. Lacroix, "Assessing the shape of the distribution of interest rates: lessons from French individual data," April 2008.
207. R. Lacroix et Laurent Maurin, « Désaisonnalisation des agrégats monétaires : Mise en place d'une chaîne rénovée », Avril 2008.
208. T. Heckel, H. Le Bihan and J. Montornès, "Sticky Wages. Evidence from Quarterly Microeconomic Data," April 2008.
209. R. Lacroix, « Analyse conjoncturelle de données brutes et estimation de cycles. Partie 1 : estimation de tests », Avril 2008.
210. R. Lacroix, « Analyse conjoncturelle de données brutes et estimation de cycles. Partie 2 : mise en œuvre empirique », Avril 2008.

Pour accéder à la liste complète des Notes d'Études et de Recherche publiées par la Banque de France veuillez consulter le site : <http://www.banque-france.fr/fr/publications/ner/ner.htm>

For a complete list of Working Papers published by the Banque de France, please visit the website: <http://www.banque-france.fr/gb/publications/ner/ner.htm>

Pour tous commentaires ou demandes sur les Notes d'Études et de Recherche, contacter la bibliothèque de la direction de la recherche à l'adresse suivante :

For any comment or enquiries on the Working Papers, contact the library of the Research Directorate at the following address :

BANQUE DE FRANCE
41- 1404 Labolog
75049 Paris Cedex 01
tél : 0033 (0)1 42 92 49 55 ou 62 65
fax :0033 (0)1 42 92 62 92
email : thierry.demoulin@banque-france.fr
jeannine.agoutin@banque-france.fr