

---

DOCUMENT  
DE TRAVAIL  
N° 250

---

UNE MODÉLISATION SÉQUENTIELLE  
DE LA VaR

Alain Monfort

Septembre 2009



UNE MODÉLISATION SÉQUENTIELLE  
DE LA VaR

Alain Monfort

Septembre 2009

Les Documents de Travail reflètent les idées personnelles de leurs auteurs et n'expriment pas nécessairement la position de la Banque de France. Ce document est disponible sur le site internet de la Banque de France « [www.banque-france.fr](http://www.banque-france.fr) ».

Working Papers reflect the opinions of the authors and do not necessarily express the views of the Banque de France. This document is available on the Banque de France Website “[www.banque-france.fr](http://www.banque-france.fr)”.

UNE MODELISATION SEQUENTIELLE  
DE LA VaR

Alain MONFORT

# ABSTRACT

## A sequential modelling of the VaR

We consider the VaR associated with the global loss generated by a set risk sources. We propose a sequence of simple models incorporating progressively the notions of contagion due to instantaneous correlations, of serial correlation, of evolution of the instantaneous correlations, of volatility clustering, of conditional heteroskedasticity and of persistency of shocks. The tools used are the standard and extended Kalman filters.

JEL Classification : C10, G11

Keywords : VaR, factor models, correlation, volatility clustering, Kalman filter.

## RESUME

### Une modélisation séquentielle de la VaR

On considère la VaR correspondant à la perte globale engendrée par un champ de sources de risque. On propose une séquence de modèles simples intégrant progressivement les phénomènes de contagion par corrélation instantanée, de corrélation temporelle, d'évolution des corrélations instantanées, de segmentation de la volatilité, d'hétéroscedasticité conditionnelle et de persistance des chocs de volatilité. Les outils utilisés sont le filtre de Kalman et le filtre de Kalman étendu.

Codes JEL : C10, G11

Mots clés : VaR, modèles à facteurs, corrélation, segmentation de la volatilité, filtre de Kalman.

## Non technical summary

The non regulation rules stress the importance of the notion of VaR. What the VaR intends to measure is clear : given a set of risk sources, an horizon and a confidence level, the VaR is the threshold under which the global loss must stay at the chosen horizon and with the given confidence level. Although the objective is clear the practical computation of the VaR raises many problems : how to estimate the distribution of the loss generated by each source ?, how to introduce time varying information ? how to disentangle a systematic and idiosyncratic risk ? how to aggregate the risks ? how to takes into account serial correlation of risk ? how to measure the clustering of risk volatilities ? how to analyze the impact of past shocks on the volatility ? how to take into account asymetry and fat tails of loss distributions ? how not to exclude extreme risks ?

The objective of this note is to propose a sequence of nested modèles taking progressively into account these questions ? For each question we will introduce a minimal formalisation, persimoniously parameterized, in order to maintain a simple interpretation for each parameter. The various steps will be illustrated by simulations. The more advanced model can be seen as a benchmark which could either generalized or simplified in various directions, the ultimate objective being to try to harmonize the procedures. The technical tools are the standard and extended Kalman filters.

## Résumé non technique

La mise en place de règles prudentielles dans les institutions financières et, plus récemment, dans les compagnies d'assurance a fait apparaître une notion centrale : la valeur en risque ou VaR. Ce que la VaR cherche à mesurer est clair : étant donné un champ de sources de risque, un horizon et un niveau de confiance, la VaR est le seuil au dessous duquel la perte globale doit rester, à l'horizon choisi et avec le niveau de confiance retenu. Cependant, bien que l'objectif poursuivi soit bien défini, la mise en oeuvre pratique du calcul de la VaR soulève une multitude de questions parmi lesquelles : comment estimer la loi de probabilité de la perte générée par chaque source de risque ? comment tenir compte du fait que cette loi doit être estimée conditionnellement à une information variant dans le temps ? comment isoler, pour chaque risque, une partie générale (ou systématique) et une partie spécifique (ou idiosyncratique) ? comment agréger les différents risques ? comment tenir compte de la diversification ou, au contraire, de la contagion des risques ? comment prendre en compte les corrélations des risques à une date donnée et de l'évolution temporelle de ces corrélations instantanées ? comment introduire les effets de corrélation dans le temps des divers risques ? comment mesurer les effets de segmentation de la volatilité des risques ? comment analyser la propagation des chocs passés sur le niveau ou la volatilité des risques ? comment rendre compte des phénomènes d'asymétrie et de queues épaisses dans les lois des pertes ? comment ne pas exclure les risques extrêmes ?

Pour tenter de répondre à ces questions, on va proposer une séquence de modèles, emboîtés les uns dans les autres, prenant progressivement en compte ces questions. Pour chaque question on introduira une formalisation minimale, très faiblement paramétrée, de façon à maintenir une interprétation simple de chaque paramètre. On illustrera les diverses étapes par des simulations. La maquette la plus avancée décrite dans cette note pourrait être considérée comme une proposition de "colonne vertébrale" pouvant être enrichie dans diverses directions ou, au contraire, partiellement ignorée. Le but ultime est de faire un pas dans la direction d'une harmonisation des pratiques et une normalisation des procédures.

Les outils utilisés sont le filtre de Kalman et le filtre de Kalman étendus.

# 1 INTRODUCTION

La mise en place de règles prudentielles dans les institutions financières et, plus récemment, dans les compagnies d'assurance a fait apparaître une notion centrale : la valeur en risque ou VaR. Ce que la VaR cherche à mesurer est clair : étant donné un champ de sources de risque, un horizon et un niveau de confiance, la VaR est le seuil au dessous duquel la perte globale doit rester, à l'horizon choisi et avec le niveau de confiance retenu. Cependant, bien que l'objectif poursuivi soit bien défini, la mise en oeuvre pratique du calcul de la VaR soulève une multitude de questions parmi lesquelles :

- comment estimer la loi de probabilité de la perte générée par chaque source de risque ?
- comment tenir compte du fait que cette loi doit être estimée conditionnellement à une information variant dans le temps ?
- comment isoler, pour chaque risque, une partie générale (ou systématique) et une partie spécifique (ou idiosyncratique)?
- comment agréger les différents risques ?
- comment tenir compte de la diversification ou, au contraire, de la contagion des risques ?
- comment prendre en compte les corrélations des risques a une date donnée et de l'évolution temporelle de ces corrélations instantanées ?
- comment introduire les effets de corrélation dans le temps des divers risques?
- comment mesurer les effets de segmentation de la volatilité des risques ?
- comment analyser la propagation des chocs passés sur le niveau ou la volatilité des risques ?
- comment rendre compte des phénomènes d'asymétrie et de queues épaisses dans les lois des pertes ?
- comment ne pas exclure les risques extrêmes ?

Pour tenter de répondre, à cette liste non exhaustive de questions il existe des pratiques très différentes conduisant à un manque de transparence dans l'interprétation des chiffres. D'où vient cette absence de consensus? Après tout on pourrait se dire que les outils puissants de l'économétrie moderne permettent d'apporter des réponses rigoureuses à toutes ces questions et qu'il suffirait, pour chacune d'elles, d'utiliser la méthode reconnue comme optimale par la théorie. Les difficultés sont en fait de trois types. Tout d'abord les méthodes économétriques, aussi sophistiquées soient-elles, sont optimales dans le cadre d'un modèle statistique donné et c'est précisément la diversité des modèles qui pose problème. La deuxième difficulté est que, pour chaque type de modèle, il faut trouver un équilibre entre sa rigueur (et donc sa complexité) et son interprétabilité (et donc sa simplicité). Enfin les méthodes économétriques peuvent se heurter à une faiblesse des données en terme de quantité ou de qualité.

L'objectif de cette note est de se concentrer sur la construction de modèles et non sur leur traitement économétrique car, comme mentionné plus haut, celui-ci est le moins discutable, même s'il peut être complexe. Plus précisément, on va proposer une séquence de modèles, emboîtés les uns dans les autres, prenant progressivement en compte les questions évoquées ci-dessus. Pour chaque question on introduira une formalisation minimale, très faiblement paramétrée, de façon à maintenir une interprétation simple de chaque paramètre. On se limitera donc à la modélisation probabiliste et statistique strictement nécessaire à cette interprétation. On illustrera les diverses étapes par des simulations. La maquette la plus avancée décrite dans cette note pourrait être considérée comme une proposition de "colonne vertébrale" pouvant être enrichie dans diverses directions ou, au contraire, partiellement ignorée. Le but ultime est de faire un pas dans la direction d'une harmonisation des pratiques et une normalisation des procédures.

La note est organisée de la façon suivante. Dans le paragraphe 2 on va introduire plusieurs définitions équivalentes de la VaR. Le paragraphe 3 décrit une première maquette permettant d'appréhender les phénomènes liés à l'agrégation de diverses sources de risque, en particulier la contagion, la diversification, la corrélation instantanée; les diverses sources de risques peuvent provenir de différentes activités d'une même entité, elles peuvent alors apparaître à l'actif ou au passif, ou elles peuvent provenir de l'activité de plusieurs entités que l'on souhaite analyser à un niveau macroéconomique. Le paragraphe 4 propose une maquette plus générale qui introduit les notions de corrélation temporelle, de conditionnement par l'information présente et

d'évolution des corrélations instantanées. Le paragraphe 5 propose une maquette qui contient les deux premières comme cas particuliers et qui ajoute une modélisation de phénomènes importants comme la segmentation de la volatilité, l'hétéroscédasticité conditionnelle et la persistance des chocs de volatilité. Les trois maquettes sont comparées à l'aide de simulations utilisant le filtre de Kalman et le filtre de Kalman étendu. Le paragraphe 6 propose des extensions et des conclusions.

## 2 DEFINITIONS DE LA VaR.

### 2.1 VaR et quantiles.

Si on note  $\pi_{t+1}$  la perte globale (positive ou négative) engendrée, entre la date  $t$  et  $t+1$ , par le champ des sources de risque considéré, la VaR de niveau de confiance  $1 - \alpha$  (ou de niveau de risque  $\alpha$ ), notée  $VaR_t(\alpha)$ , est définie par :

$$\begin{aligned} P_t[\pi_{t+1} \geq VaR_t(\alpha)] &= \alpha \\ \text{ou} & \\ P_t[\pi_{t+1} < VaR_t(\alpha)] &= 1 - \alpha \end{aligned} \tag{1}$$

$P_t$  étant la loi de  $\pi_{t+1}$ , conditionnelle à l'information de la date  $t$ . Donc  $VaR_t(\alpha)$  s'interprète comme le quantile conditionnel d'ordre  $1 - \alpha$  de la perte globale. En pratique  $\alpha$  sera faible, par exemple égal à 0.01.

### 2.2 VaR et réserves.

Un autre angle de vue de la VaR peut être utile. Si on note  $w_t$  la valeur des sources de risques en  $t$  on a  $\pi_{t+1} = w_t - w_{t+1}$ . Si on note  $res_t$  les réserves en  $t$  (non rémunérées entre  $t$  et  $t + 1$ ) permettant la survie en  $t + 1$  de l'entité définie par le champ des sources de risques, avec la probabilité  $1 - \alpha$  on a :

$$\begin{aligned} P_t[w_{t+1} + res_t > 0] &= 1 - \alpha \\ \text{ou} \quad P_t[w_t - \pi_{t+1} + res_t > 0] &= 1 - \alpha \\ \text{ou} \quad P_t[\pi_{t+1} < w_t + res_t] &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$VaR_t(\alpha) = w_t + res_t \tag{2}$$

Donc  $VaR_t(\alpha)$  s'interprète aussi comme la somme de la valeur en  $t$  de l'entité et des réserves, c'est-à-dire comme le capital exposé ou la "valeur en risque" en cas de ruine.

### 2.3 VaR et capital initial optimal

Une troisième définition équivalente de la VaR est aussi éclairante.

Supposons que l'on cherche le capital  $z_t$  minimisant l'espérance d'une fonction  $c_{t+1}$  du type :

$$\begin{aligned} l_{t+1} &= (1 - \alpha)(\pi_{t+1} - z_t), \text{ si } \pi_{t+1} \geq z_t \\ &= \alpha(z_t - \pi_{t+1}), \text{ si } \pi_{t+1} < z_t \\ \text{ou } l_{t+1} &= (1 - \alpha)(\pi_{t+1} - z_t)^+ + \alpha(z_t - \pi_{t+1})^+ \end{aligned} \quad (3)$$

Autrement dit on attribue un coût élevé,  $1 - \alpha$ , à la situation dans laquelle la perte  $\pi_{t+1}$  est supérieure au capital et un coût faible,  $\alpha$ , à la situation dans laquelle un coussin de garantie  $z_t - \pi_{t+1}$  est inutilisé. On peut montrer (voir annexe 1) que le capital  $z_t$  réalisant le minimum de l'espérance conditionnelle de  $l_{t+1}$  en  $t$  est précisément  $VaR_t(\alpha)$ . Donc  $VaR_t(\alpha)$  est le capital en  $t$  réalisant le compromis optimal, au sens de la fonction de coût choisie, entre une perte excessive et un capital inutilisé excessif.

### 2.4 VaR et capital économique.

Supposons que la loi conditionnelle de  $\pi_{t+1}$  à la date  $t$  soit celle de  $\mu_t + \sigma_t U$   $\sigma_t > 0$ , où  $U$  est une variable aléatoire de moyenne nulle, de variance 1 et de fonction de répartition  $F$ ;  $\mu_t$  est alors l'espérance conditionnelle de  $\pi_{t+1}$ ,  $\sigma_t$  son écart type conditionnel et on a :

$$\begin{aligned} P_t[\mu_t + \sigma_t U < VaR_t(\alpha)] &= 1 - \alpha \\ \text{ou } P_t[U < \frac{VaR_t(\alpha) - \mu_t}{\sigma_t}] &= 1 - \alpha \\ \text{ou } F\left[\frac{VaR_t(\alpha) - \mu_t}{\sigma_t}\right] &= 1 - \alpha \\ \text{ou } VaR_t(\alpha) &= \mu_t + \sigma_t F^{-1}(1 - \alpha) \end{aligned} \quad (4)$$

Donc  $VaR_t(\alpha)$  se décompose en une "perte attendue"  $\mu_t$ , c'est-à-dire la moyenne conditionnelle des pertes et une perte "perte inattendue"  $\sigma_t F^{-1}(1 - \alpha)$ , aussi appelée "capital économique". On voit également que la mesure de risque constituée par  $VaR_t(\alpha)$  est une combinaison linéaire de

$\mu_t$  et  $\sigma_t$ , le poids  $F^{-1}(1 - \alpha)$  affecté à la volatilité conditionnelle  $\sigma_t$  étant d'autant plus fort que le niveau de risque  $\alpha$  est petit et que la loi de fonction de répartition  $F$  a une queue droite épaisse.

### 3 MODELE M1 : agrégation, diversification, contagion, corrélations instantanées

#### 3.1 Définition

Supposons qu'il y ait  $n$  sources de risque indicées par  $i = 1, \dots, n$ . On note  $\pi_{i,t+1}$  la perte engendrée par la source  $i$  entre  $t$  et  $t + 1$ , on note  $\Pi_{t+1}$  le vecteur de composantes  $\pi_{i,t+1}, i = 1, \dots, n$ , et  $\pi_{t+1} = \sum_{i=1}^n \pi_{i,t+1}$  la perte globale.

Pour appréhender les problèmes d'agrégation et les phénomènes de diversification, contagion, dus aux corrélations instantanées entre les pertes  $\pi_{i,t+1}$  on introduit la maquette simple suivante :

$$\pi_{i,t+1} = a_i + b_i F_{t+1} + u_{i,t+1}, i = 1, \dots, n \quad (5)$$

On suppose que les  $F_{t+1}$  sont inobservables, indépendants entre eux, de loi  $N(0, 1)$ , loi normale centrée réduite, que les  $u_{i,t+1}$  sont inobservables, de loi  $N(0, \sigma_i^2)$  indépendants entre eux et des  $F_{t+1}$ , et que les  $a_i, b_i$  sont des paramètres.  $F_{t+1}$  s'interprète donc comme un facteur de risque commun tandis que les  $u_{i,t+1}$  sont des risques idiosyncratiques.

Les pertes  $\pi_{i,t+1}$  sont normales de moyenne  $a_i$  et de variance  $b_i^2 + \sigma_i^2$ .

En outre deux pertes de la même période  $\pi_{i,t+1}$  et  $\pi_{j,t+1}$  ont une covariance égale à  $b_i b_j$  et donc une corrélation  $r_{ij} = \frac{b_i b_j}{(b_i^2 + \sigma_i^2)^{1/2} (b_j^2 + \sigma_j^2)^{1/2}}$ . Les pertes de dates différentes sont ici supposées indépendantes.

Les paramètres  $a_i$  sont donc des paramètres de niveaux moyens des pertes, les  $b_i$  sont des paramètres de sensibilité au facteur de risque commun  $F_{t+1}$  et les  $\sigma_i^2$  sont les variances des risques idiosyncratiques.

La covariance entre  $\pi_{i,t+1}$  et  $F_{t+1}$  est  $b_i$  et la corrélation est  $b_i / (b_i^2 + \sigma_i^2)^{1/2}$ .

La perte globale  $\pi_{t+1}$  est de loi normale  $N[e'a, (e'b)^2 + e'\sigma^2]$ , en notant  $e$  le vecteur de taille  $n$  dont les composantes valent 1, et  $\sigma^2$  le vecteur dont les

composantes sont les  $\sigma_i^2$  ou  $N(e'a, c^2 + e'\sigma^2)$ , en notant  $c = e'b = \sum_{i=1}^n b_i$ .

La  $VaR_t(\alpha)$  est donc en appliquant (4) :

$$VaR_t(\alpha) = e'a + (c^2 + e'\sigma^2)^{1/2}\Phi^{-1}(1 - \alpha) \quad (6)$$

$\Phi$  étant la fonction de répartition de loi  $N(0, 1)$ .

$c$  dépend de la structure des covariances  $b_i$  entre  $\pi_{i,t+1}$  et  $F_{t+1}$ . Plus  $c^2$  ou  $|c|$  est grand plus  $VaR_t(\alpha)$  est grande :  $c^2$  peut être vu comme une mesure de contagion. En particulier si  $c = 0$ , c'est-à-dire si la somme des sensibilités ou des covariances  $b_i$  entre les  $\pi_{i,t+1}$  et  $F_{t+1}$  est nulle, le champ de risques est immunisé contre le facteur de risque commun. C'est évidemment le cas si tous les  $b_i$  sont nuls, c'est-à-dire si les  $\pi_{i,t+1}, i = 1, \dots, n$ , sont indépendants

Notons que les  $VaR_{it}(\alpha)$  associées à chaque risque sont égales à :

$$VaR_{it}(\alpha) = a_i + (b_i^2 + \sigma_i^2)^{1/2}\Phi^{-1}(1 - \alpha) \quad (7)$$

et leur somme est :

$$\sum_{i=1}^n VaR_{it}(\alpha) = e'a + \sum_{i=1}^n (b_i^2 + \sigma_i^2)^{1/2}\Phi^{-1}(1 - \alpha) \quad (8)$$

Comparant (6) et (8) on vérifie que cette somme est toujours supérieure ou égale à  $VaR_t(\alpha)$ , l'égalité n'ayant lieu que si  $\sigma_i^2 = 0, \forall i$  et si tous les  $b_i$  sont de même signe (voir Annexe 2), c'est-à-dire si les  $\pi_{it}$  sont des fonctions linéaires toutes croissantes (ou décroissantes) de  $F_t$ . Si on exclut ce cas limite, il y a diversification partielle.

Notons aussi que si on supposait, à tort, que les  $\pi_{i,t+1}$  sont indépendants on en déduirait une  $VaR_t(\alpha)$  erronée :

$$VaR_t^e(\alpha) = e'a + \left[ \sum_{i=1}^n (b_i^2 + \sigma_i^2) \right]^{1/2} \Phi^{-1}(1 - \alpha) \quad (9)$$

Comparant (6) et (9) on voit que cette  $VaR_t^e(\alpha)$  erronée peut sous-estimer ou sur estimer la  $VaR_t(\alpha)$  (voir Annexe 3). Elle la sous-estime si et seulement si  $c^2 > \sum_{i=1}^n b_i^2$ , c'est-à-dire si la contagion est suffisamment forte; dans ce cas  $VaR_t^e(\alpha)$  sur-estime la diversification. La valeur  $VaR_t^e(\alpha)$  est correcte si  $c^2 =$

$\sum_{i=1}^n b_i^2$ , c'est-à-dire  $(\sum_{i=1}^n b_i)^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2$ ; c'est le cas si les  $\pi_{it}$  sont effectivement indépendants, c'est-à-dire si les  $b_i$  sont nuls sauf au plus un, mais c'est le cas plus généralement si la somme des covariances  $\sum_{i<j} b_i b_j$  est nulle.

### 3.2 Risques homogènes.

Si le champ de sources de risque est homogène, c'est-à-dire si  $a_i = a_0, b_i = b_0, b_0 > 0, \sigma_i^2 = \sigma_0^2$  pour  $i = 1, \dots, n$ , on a :

$$VaR_t(\alpha) = na_0 + (n^2 b_0^2 + n\sigma_0^2)^{1/2} \Phi^{-1}(1 - \alpha) \quad (10)$$

Les  $VaR_{it}$  associées à chaque risque sont égales et valent :

$$VaR_{it}(\alpha) = a_0 + (b_0^2 + \sigma_0^2)^{1/2} \Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

La  $VaR$  moyenne par source de risque est

$$\begin{aligned} \overline{VaR}_t(\alpha) &= \frac{1}{n} VaR_t(\alpha) \\ &= a_0 + (b_0^2 + \frac{\sigma_0^2}{n})^{1/2} \Phi^{-1}(1 - \alpha) \\ &< VaR_{it}(\alpha) \end{aligned}$$

Si  $n$  tend vers l'infini,  $\overline{VaR}_t(\alpha)$  tend vers  $a_0 + b_0 \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ , la partie due à la perte non anticipée tend donc vers  $b_0 \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ , qui est non nulle si  $b_0 \neq 0$  ; il y a alors diversification partielle même asymptotiquement car l'effet du risque commun  $F_t$  ne peut pas être diversifié. Si  $b_0 = 0$ , les  $\pi_{i,t+1}$  sont indépendants de même loi,  $\overline{VaR}_t(\alpha)$  tend vers  $a_0$ , lorsque  $n$  tend vers l'infini, la partie non anticipée est nulle, et il y a diversification totale asymptotiquement.

### 3.3 Reconstitution du facteur de risque commun

Il peut être intéressant de reconstituer aux mieux le facteur de risque commun  $F_t$  au vu des observations des vecteurs de pertes  $\Pi_t, \dots, \Pi_1$ . Dans le modèle statique  $M1$  considéré dans ce paragraphe l'approximation optimale

$\hat{F}_t$  de  $F_t$  ne dépend que du vecteur  $\Pi_t$  de la même date; plus précisément on a (voir annexe 4) :

$$\begin{aligned}\hat{F}_t &= b'(\Sigma + bb')^{-1}(\Pi_t - a) \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \frac{\pi_{it} - a_i}{\sigma_i^2} / (1 + \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{\sigma_i^2})\end{aligned}\quad (11)$$

( $\Sigma$  étant la matrice diagonale de termes diagonaux  $\sigma_i^2$ ).

La contribution de  $\pi_{it}$  à  $\hat{F}_t$  est positive si  $\pi_{it} - a_i$  et  $b_i$  sont de même signe et négative sinon; elle est d'autant plus forte, en valeur absolue, que  $|b_i|$  et  $|\pi_{it} - a_i|$  sont grands et que  $\sigma_i^2$  est petit.

L'espérance mathématique de  $\hat{F}_t$  est nulle comme celle de  $F_t$  et la variance de l'erreur  $F_t - \hat{F}_t$  est :

$$V(F_t - \hat{F}_t) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{\sigma_i^2}}\quad (12)$$

Elle est d'autant plus petite que les ratios de type "signal-bruit"  $\frac{b_i^2}{\sigma_i^2}$  sont grands.

Il faut noter que le signe de  $F_t$  n'a pas de sens (car on peut toujours remplacer  $F_t$  par  $-F_t$  et  $b$  par  $-b$ ) de même que son amplitude, liée à la valeur arbitraire 1 de sa variance; en revanche ses valeurs relatives à deux dates sont interprétables. Par exemple si  $\frac{\hat{F}_t}{\hat{F}_{t-1}}$  est positif et grand, cela signifie que le facteur de risque commun a eu un impact de même sens aux deux dates  $t$  et  $t - 1$  pour chacune des pertes individuelles, que cet impact est beaucoup plus fort en  $t$  qu'en  $t - 1$  et que le sens de cet impact sur  $\pi_{it}$  et  $\pi_{i,t-1}$  est positif si  $b_i$  est positif, négatif sinon.

### 3.4 Un exemple

On considère les valeurs numériques  $t = 1, \dots, 100$ ,  $a_i = -0.2$ ,  $\sigma_i^2 = 1\forall i$ ,  $\alpha = 1\%$ . Les  $b_i$  sont égaux à 1 ou -1 et on a  $n_1$  valeurs égales à 1 ou donc  $n - n_1$  valeurs égales à -1.

La mesure de contagion est  $c^2 = (2n_1 - n)^2$ . La  $VaR_t^e$  erronée calculée sous l'hypothèse d'indépendance des risques est supérieure à  $VaR_t$  si  $c^2 < \sum_{i=1}^n b_i^2$ , c'est-à-dire  $(2n_1 - n)^2 < n$  ou  $\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} < n_1 < \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2}$ . Si on prend  $n = 16, n_1 = 12$ , l'intervalle précédent est  $\{6, 10\}$ , donc  $c^2 > \sum_{i=1}^n b_i^2$  et on a  $VaR_t^e < VaR_t$  : l'indice de contagion est suffisamment élevé pour entraîner une  $VaR_t^e$  inférieure à  $VaR_t$ .

La figure 1 montre une trajectoire simulée du facteur de risque commun et sa reconstitution par (11).

La reconstitution est bonne car, pour chaque perte, l'indice signal bruit  $\frac{b_i^2}{\sigma_i^2}$  vaut 1, la variance de l'erreur de prévision donnée par (12) vaut  $1/17 \simeq 0.059$  et l'écart type de l'erreur vaut 0.24

La figure 2 montre une trajectoire de la perte totale  $\pi_t, t = 1, \dots, 100$ , la  $VaR_t$ , la  $VaR_t^e$  erronée, calculée sous l'hypothèse d'indépendance instantanée des sources de risque et la perte globale attendue. La différence entre  $VaR_t$  et la perte attendue fournit le capital économique. On constate que la valeur de  $\pi_t$  dépasse une fois  $VaR_t$ , ce qui est conforme à la valeur du niveau de risque  $\alpha = 1\%$ . En revanche  $\pi_t$  dépasse  $VaR_t^e$  sept fois, car, comme on l'a vu,  $VaR_t^e$  est trop faible.

La somme de toutes les pertes sur la période est  $-225$  (le gain est donc de 225) la somme des pertes dépassant  $VaR_t$  est 1,2 soit environ 0,5% des gains, alors que la somme des pertes dépassant  $VaR_t^e$  est 26 soit environ 11,5% des gains. On voit, dans cet exemple, que la non prise en compte des corrélations instantanées des sources de risque a des conséquences importantes.

## 4 MODELE M2: corrélation temporelle, conditionnement par l'information présente, évolution des corrélations instantanées.

Dans le modèle M1 toutes les variables aléatoires sont indépendantes d'une période à une autre : le modèle est statique. Dans le modèle M2 on introduit de la dynamique dans le comportement du facteur de risque commun  $F_t$ .

### 4.1 Dynamique du facteur de risque commun.

On suppose que le processus inobservable  $F_t$  est autorégressif d'ordre 1, ( $AR(1)$ ) de variance marginale 1 :

$$F_{t+1} = \rho F_t + (1 - \rho^2)^{1/2} \varepsilon_{t+1} \quad (13)$$

où les  $\varepsilon_t$  sont indépendants entre eux, indépendants des  $u_{i,t}$  et de loi  $N(0, 1)$ , et  $\rho$  est un paramètre vérifiant  $|\rho| < 1$ .

Dans ce modèle la corrélation entre  $F_{t+1}$  et  $F_t$  est  $\rho$ , la meilleure prévision de  $F_{t+1}$  en  $t$ , si  $F_t$  était observable, serait  $\rho F_t$  et la variance conditionnelle de l'erreur de prévision serait  $1 - \rho^2$ . Il faut noter que, si  $\rho^2$  proche de 1, cette variance conditionnelle est beaucoup plus faible que la variance non conditionnelle (ou marginale) qui vaut 1 : autrement dit la connaissance de  $F_t$  apporte une grande information sur  $F_{t+1}$ , contrairement à ce qui se passait dans le modèle M1. Le modèle M1 est emboîté dans M2 puisqu'il est obtenu en mettant le paramètre de corrélation  $\rho$ , à zéro.

### 4.2 Dynamique du vecteur des pertes et calcul de $Var_t$ .

La dynamique de  $F_t$  engendre une dynamique du vecteur  $\Pi_t$  des pertes  $\pi_{it}$  qui satisfont toujours les mêmes equations que dans M1 :

$$\pi_{i,t+1} = a_i + b_i F_{t+1} + u_{i,t+1}$$

ou, vectoriellement :

$$\Pi_{t+1} = a + b F_{t+1} + u_{t+1} \quad (14)$$

et on a :  $E(\Pi_{t+1}) = a, V(\Pi_{t+1}) = \Sigma + bb', cov(\Pi_{t+1}, \Pi_t) = \rho bb', \Sigma$  étant la matrice diagonale de termes diagonaux  $\sigma_i^2$ .

L'information disponible à la date  $t$  est constituée de  $(\Pi_t, \Pi_{t-1}, \dots, \Pi_1)$ , notée  $\Pi^t$ , et la loi conditionnelle pertinente pour le calcul de  $VaR_t$  est la loi conditionnelle de  $\pi_{t+1}$  sachant  $\Pi^t$ , où  $\pi_{t+1} = \sum_{i=1}^n \pi_{i,t+1} = e' \Pi_{t+1}$  ( $e$  étant le vecteur de taille  $n$  dont les composantes valent 1).

La loi conditionnelle de  $\Pi_{t+1}$  sachant  $\Pi^t$  est la loi normale :

$$N(a + b\hat{F}_{t+1/t}, \Sigma + \omega_{t+1/t}^2 bb') \quad (15)$$

où  $\hat{F}_{t+1/t} = E(F_{t+1}/\Pi^t)$  (espérance conditionnelle de  $F_{t+1}$  sachant  $\Pi^t$ ) et où  $\omega_{t+1/t}^2 = V(F_{t+1}/\Pi^t)$  (variance conditionnelle de  $F_{t+1}$  sachant  $\Pi^t$ ).

Les quantités  $\hat{F}_{t+1/t}$  et  $\omega_{t+1/t}^2$  peuvent être calculées récursivement en utilisant le filtre de Kalman (voir Gourieroux-Monfort, 1995, chapitre 15) :

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \quad \hat{F}_{t/t} = \hat{F}_{t/t-1} + b'(\omega_{t/t-1}^{-2}\Sigma + bb')^{-1} + (\Pi_t - a - b\hat{F}_{t/t-1}) \\ ii) \quad \hat{F}_{t+1/t} = \rho\hat{F}_{t/t} \\ iii) \quad \omega_{t/t}^2 = \omega_{t/t-1}^2[1 - b'(\omega_{t/t-1}^{-2}\Sigma + bb')^{-1}b] \\ iv) \quad \omega_{t+1/t}^2 = \rho^2\omega_{t/t}^2 + 1 - \rho^2 \\ \hat{F}_{1/0} = 0; \omega_{1/0}^2 = 1 \end{array} \right. \quad (16)$$

Les quantités  $\hat{F}_{t/t}$  et  $\omega_{t/t}^2$  intervenant dans (16) sont :

$$\begin{aligned} \hat{F}_{t/t} &= E(F_t/\Pi^t) \\ \hat{\omega}_{t/t}^2 &= V(F_t/\Pi^t) \end{aligned} \quad (17)$$

appelées respectivement "filtrage" de  $F_t$  et variance de l'erreur de filtrage.

$\hat{F}_{t/t}$  est la meilleure approximation de  $F_t$  connaissant  $\Pi^t$ , tandis que  $\hat{F}_{t/t-1}$  meilleure approximation de  $F_t$  connaissant  $\Pi^{t-1}$ , c'est-à-dire la prévision optimale de  $F_t$  en  $t-1$ .

Dans le cas du modèle M1, on a  $\rho = 0$  et  $\hat{F}_{t+1/t} = 0, \omega_{t+1/t}^2 = 1$ , et d'après 16 i)

$$\hat{F}_{t/t} = b'(\Sigma + bb')^{-1}(\Pi_t - a)$$

on retrouve l'équation (11).

Dans le cas général, la loi de  $\Pi_{t+1}$  sachant  $\Pi^t$ , donnée par (15), montre que la loi pertinente pour calculer  $VaR_t$  dépend des valeurs présentes et passées de  $\pi_t$ . Les équations (16) impliquent que la moyenne conditionnelle dépend linéairement des observations passées des pertes, tandis que la matrice de variance-covariance conditionnelle  $\Sigma + \omega_{t+1/t}^2 bb'$  évolue dans le temps de façon indépendante des observations et converge rapidement vers une limite.

La loi de  $\pi_{t+1} = e'\Pi_{t+1}$  sachant  $\Pi^t$  est la loi normale :

$$\begin{aligned} & N[e'a + e'b\hat{F}_{t+1/t}, \omega_{t+1/t}^2(e'b)^2 + e'\sigma^2] \\ & \text{avec : } \sigma^2 = (\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)' \end{aligned} \quad (18)$$

ou en utilisant la notation  $c = e'b$ ,

$$N[e'a + c\hat{F}_{t+1/t}, \omega_{t+1/t}^2 c^2 + e'\sigma^2] \quad (19)$$

On voit en particulier que la mesure de contagion  $c^2$  a un impact sur l'évolution temporelle de la variance conditionnelle des pertes globales.

Le calcul de  $VaR_t$  découle de (4) et on a :

$$VaR_t = e'a + c\hat{F}_{t+1/t} + (\omega_{t+1/t}^2 c^2 + e'\sigma^2)^{1/2} \Phi^{-1}(1 - \alpha) \quad (20)$$

### 4.3 Calculs erronés de la VaR

Si on ne tient pas compte des effets de corrélation instantanée ou de corrélation temporelle on est amené à proposer des valeurs erronées de la VaR.

Ainsi si on oublie la corrélation temporelle, c'est-à-dire si on suppose à tort que  $\rho = 0$ , on se place dans le cas où les  $\pi_{t+1}$  sont indépendants, gaussiens de loi  $N(e'a, c^2 + e'\sigma^2)$  et la VaR erronée obtenue est :

$$VaR_t^{(1)} = e'a + (c^2 + e'\sigma^2)^{1/2} \Phi^{-1}(1 - \alpha) \quad (21)$$

Si on oublie en outre la corrélation instantanée c'est-à-dire si on suppose, à tort, que les  $\pi_{it}, i = 1, \dots, n$  sont indépendants, de lois  $N(a_i, b_i^2 + \sigma_i^2)$ , on aboutit à la VaR :

$$VaR_t^{(2)} = e'a + (e'b^2 + e'\sigma^2)^{1/2}\Phi^{-1}(1 - \alpha) \quad (22)$$

avec  $b^2 = (b_1^2, \dots, b_n^2)'$

Ces valeurs de VaR erronées sont constantes dans le temps, contrairement à  $VaR_t$ , et peuvent être très différentes de  $VaR_t$ , comme le montre l'exemple suivant.

#### 4.4 Exemple

On prend les mêmes valeurs numériques que dans 3.4 pour tous les paramètres autre que  $\rho$  et on prend  $\rho = 0.8$ . La figure 3 montre une simulation du facteur de risque commun  $F_t$  ainsi que son filtrage  $\hat{F}_{t/t}$  et sa prévision  $\hat{F}_{t/t-1}$ . Conformément à la théorie le filtrage  $\hat{F}_{t/t}$  fournit une meilleure approximation de  $F_t$  que la prévision  $\hat{F}_{t/t-1}$ , en particulier dans les périodes de retournement.

La figure 4 montre la simulation correspondante de la perte globale  $\pi_t$  ainsi, que sa prévision en  $t-1$ , à savoir  $e'a + e'b\hat{F}_{t/t-1}$ , là encore les prévisions les moins bonnes correspondent aux périodes de retournement.

La figure 5 montre à nouveau la simulation de la perte globale, la  $VaR_t$  exacte, les  $VaR_t^{(1)}$  et  $VaR_t^{(2)}$  erronées et la perte attendue.

Dans cet exemple  $\pi_t$  dépasse une fois (sur cent)  $VaR_t$ , ce qui est en cohérence avec  $\alpha = 1\%$ . La perte  $\pi_t$  dépasse également une fois  $VaR_t^{(1)}$ , mais  $VaR_t^{(1)}$  est très souvent trop grande (dans les périodes 20-30, ou 75-100), ce qui implique un fort capital inutilisé. Enfin  $\pi_t$  dépasse treize fois  $VaR_t^{(2)}$ , qui est manifestement beaucoup trop faible. L'interprétation intuitive de ces résultats est simple. La  $VaR_t^{(1)}$  est très souvent trop grande car l'oubli de la corrélation temporelle revient à remplacer la variance conditionnelle de  $F_t$ , à savoir  $1 - \rho^2$ , par sa variable non conditionnelle, à savoir 1, et donc à majorer la  $VaR$ . Il faut noter cependant que cette surestimation moyenne n'évite pas un dépassement de  $VaR_t^{(1)}$ , comme pour la  $VaR_t$  correcte. La  $VaR_t^{(2)}$  avec oubli de la corrélation temporelle et de la corrélation instantanée subit deux influences opposées : le premier oubli, comme on vient de le voir, sur-estime la VaR, tandis que le deuxième la sous-estime, avec les valeurs

numériques retenues, comme cela a été constaté en 3.4. Cette deuxième influence l'emporte nettement dans cet exemple.

On sait d'ailleurs d'après 2.3 que pour chaque date  $t$ ,  $VaR_t$  réalise le minimum en  $z_t$  de

$$E_t[(1-\alpha)(\pi_{t+1}-z_t)^+ - \alpha(z_t-\pi_{t+1})^+]$$

donc, pour n'importe quelle séquence  $z_t$  on a :

$$E_t[(1-\alpha)(\pi_{t+1}-z_t)^+ + \alpha(z_t-\pi_{t+1})^+ - (1-\alpha)(\pi_{t+1}-VaR_t)^+ + \alpha(VaR_t-\pi_{t+1})^+] \geq 0$$

Cette inégalité est aussi vraie en remplaçant l'espérance conditionnelle par l'espérance, ce qui veut dire que la moyenne empirique de la somme entre crochet est forcément positive quand elle est prise sur un nombre de dates suffisamment grand.

Ce résultat signifie que la somme pondérée des valeurs absolues des écarts entre  $\pi_{t+1}$  et toute suite  $z_t$ ,  $\sum_{t=1}^T [(1-\alpha)(\pi_{t+1}-z_t)^+ + \alpha(z_t-\pi_{t+1})^+]$ , est minimale lorsqu'on prend  $z_t = VaR_t$ .

## 5 MODELE M3 : segmentation de la volatilité, hétéroscédasticité conditionnelle, persistance des chocs de volatilité

Dans le modèle M2, le facteur de risque commun  $F_t$ , qui pilote la dynamique de  $\Pi_t$ , a une variance conditionnelle au passé constante, et égale à  $1 - \rho^2$ ; le processus  $F_t$  est conditionnellement homoscédastique. Une hypothèse plus réaliste consiste à introduire une dynamique avec une variance conditionnelle au passé non constante, c'est-à-dire à introduire de l'hétéroscédasticité conditionnelle, pour prendre en compte les effets de segmentation de la volatilité.

### 5.1 Modélisation AR(1) - ARCH (1) du facteur de risque commun.

Dans le modèle M3 on suppose la dynamique suivante pour  $F_t$  :

$$\begin{aligned}
F_{t+1} &= \rho F_t + (1 - \rho^2)^{1/2} s_{t+1} \varepsilon_{t+1}, |\rho| < 1 \\
s_{t+1}^2 &= 1 - \gamma + \gamma s_t^2 \varepsilon_t^2, 0 < \gamma < 1
\end{aligned} \tag{23}$$

où les  $\varepsilon_t$  sont indépendants et de loi  $N(0, 1)$ .

La variance conditionnelle du bruit  $\eta_{t+1} = s_{t+1} \varepsilon_{t+1}$  sachant son passé est donc  $1 - \gamma + \gamma \eta_t^2$ , c'est un processus *ARCH*(1) de variance non conditionnelle 1.

Le modèle M2 est obtenu en faisant  $\gamma = 0$  il est donc emboîté dans M3. On voit qu'une valeur élevée de  $\eta_t$ , en valeur absolue, et donc de  $\eta_t^2$ , entraîne une valeur élevée de la variance de  $\eta_{t+1}$  et donc une grande probabilité de valeur élevée de  $|\eta_{t+1}|$  : c'est le phénomène de segmentation de la volatilité, qui sera d'autant plus marqué que  $\gamma$  est proche de 1;  $\gamma$  s'interprète donc comme un paramètre de segmentation de la volatilité.

De même la loi conditionnelle de  $F_{t+1}$  sachant son passé est :

$$N\{\rho F_t, (1 - \rho^2)(1 - \gamma) + \gamma(F_t - \rho F_{t-1})^2\} \tag{24}$$

les valeurs présentes et passées de  $F_t$  ont un impact non seulement sur l'espérance conditionnelle de  $F_{t+1}$  mais aussi sur sa variance conditionnelle.

Le vecteur des pertes  $\Pi_{t+1}$  est toujours donné par :

$$\Pi_{t+1} = a + bF_{t+1} + u_{t+1}$$

où les  $u_t$  sont indépendants entre eux, indépendants des  $\varepsilon_t$  et de loi  $N(0, \Sigma)$ ,  $\Sigma$  matrice diagonale de terme diagonaux  $\sigma_i^2$ .

Dans ce modèle on a toujours les propriétés de M2 :

$$E(F_{t+1}) = 0, V(F_{t+1}) = 1$$

$$E(\Pi_{t+1}) = a, V(\Pi_{t+1}) = \Sigma + bb'$$

$$\text{cov}(\Pi_{t+1}, \Pi_t) = \rho bb'$$

En revanche la loi conditionnelle de  $\Pi_{t+1}$  sachant  $\Pi^t$  est modifiée. Cette loi n'est d'ailleurs plus gaussienne mais elle est peut être approximée par une loi gaussienne, du même type que dans le modèle M2 :

$$N(a + b\hat{F}_{t+1/t}, \Sigma + \omega_{t+1/t}^2 bb') \quad (25)$$

mais avec un calcul récursif de  $\hat{F}_{t+1/t}$  et  $\omega_{t+1/t}^2$  différent. Il est donné par le filtre de Kalman étendu, obtenu en remplaçant 16 iv) par :

$$\omega_{t+1/t}^2 = \rho^2 \omega_{t/t}^2 + (1 - \rho^2) s_{t+1/t}^2 \quad (26)$$

avec :

$$s_{t+1/t}^2 = 1 - \gamma + \gamma(\hat{F}_{t/t} - \rho\hat{F}_{t-1/t-1})^2(1 - \rho^2)^{-1}$$

Le calcul de  $VaR_t$  peut de la même façon être approximé par (20).

On peut également calculer des  $VaR$  de façon erronée. La  $VaR_t^{(3)}$  est calculée en ignorant la segmentation de la volatilité, c'est-à-dire en mettant  $\gamma = 0$  et en utilisant le filtre de Kalman (16). On peut aussi calculer  $VaR_t^{(1)}$  en ignorant la segmentation de la volatilité et la corrélation temporelle et  $VaR_t^{(2)}$  et ignorant la segmentation de volatilité et les deux types de corrélation.

## 5.2 Exemple

On prend les mêmes valeurs des paramètres qu'en 4.4 et  $\gamma = 0.8$ . La figure 6 montre le facteur de risque commun, son filtrage et sa prévision; on constate à nouveau des problèmes de prévision lors des retournements mais aussi lors des périodes de haute volatilité. La figure 7 confirme ses constatations pour la perte globale. La figure 8 montre que  $\pi_t$  dépasse  $VaR_t$  une fois (sur cent).  $VaR_t^{(3)}$  oscille autour de la  $VaR_t$  correcte : elle peut être trop faible ou trop forte selon les périodes, ce qui est cohérent avec le fait que la variance conditionnelle de  $F_{t+1}$ , à savoir  $(1 - \rho^2)s_{t+1}^2$ , a pour espérance  $(1 - \rho^2)$ , qui est la variance obtenue en prenant  $\gamma = 0$ .  $VaR_t^{(1)}$  est dépassée une fois mais est systématiquement trop grande tandis que  $VaR_t^{(2)}$  est dépassée sept fois. On retrouve des résultats analogues à ceux de la section 4.4.

## 6 EXTENSIONS ET CONCLUSION

Les modèles M1, M2, M3 pourraient être généralisés dans de nombreuses directions tout en conservant la même facilité de traitement grâce à la flexibilité

du filtre de Kalman et du filtre de Kalman étendu :

- introduction de variables exogènes
- introduction de plusieurs retards dans la dynamique des facteurs.
- introduction d'effets asymétriques des chocs de volatilité
- prise en compte de  $VaR_t$  à des horizons supérieurs à 1

D'autres développements pourraient être introduits à condition d'utiliser des techniques plus avancées comme l'inférence indirecte, le maximum de vraisemblance simulé ou les algorithmes MCMC; avec ces techniques on pourrait par exemple s'affranchir de la normalité conditionnelle en introduisant des mélanges de lois normales et en utilisant les techniques de traitement des variables cachées discrètes.

Mais les maquettes M1, M2, M3 pourraient déjà constituer les outils de base d'une harmonisation des méthodes de calcul de la VaR. Une telle harmonisation pourrait déboucher sur des normes structurées, susceptibles de s'adapter à divers contextes, permettant une meilleure évaluation des risques et donnant des possibilités de comparaison des comportements de diverses entités à un instant donné ou à des périodes différentes.

## ANNEXE 1

On a :

$$\begin{aligned}
 l_{t+1} &= (1 - \alpha)(\pi_{t+1} - z_t)\mathbb{1}_{\pi_{t+1} \geq z_t} + \alpha(z_t - \pi_{t+1})\mathbb{1}_{\pi_{t+1} < z_t} \\
 \frac{\partial E_t l_{t+1}}{z_t} &= -(1 - \alpha)P_t(\pi_{t+1} \geq z_t) + \alpha P_t(\pi_{t+1} < z_t) \\
 &= -(1 - \alpha)[1 - P_t(\pi_{t+1} < z_t)] + \alpha P_t(\pi_{t+1} < z_t) \\
 &= -(1 - \alpha) + P_t(\pi_{t+1} < z_t)
 \end{aligned}$$

Donc la nullité de la dérivée implique :

$$z_t = VaR_t(\alpha).$$

## ANNEXE 2

$$VaR_t = e'a + [(\sum_{i=1}^n b_i)^2 + \sum_{i=1}^n \sigma_i^2]^{1/2} \Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

$$\sum_{i=1}^n VaR_{it} = e'a + [\sum_{i=1}^n (b_i^2 + \sigma_i^2)]^{1/2} \Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

$\sum_{i=1}^n VaR_{it} - VaR_t$  est du signe de :

$$\sum_{i=1}^n (b_i^2 + \sigma_i^2)^{1/2} - [(\sum_{i=1}^n b_i)^2 + \sum_{i=1}^n \sigma_i^2]^{1/2}$$

ou de

$$\sum_{i=1}^n (b_i^2 + \sigma_i^2) + \sum_{i \neq j} (b_i^2 + \sigma_i^2)^{1/2} (b_j^2 + \sigma_j^2)^{1/2}$$

$$- \sum_{i=1}^n (b_i^2 + \sigma_i^2) - \sum_{i \neq j} b_i b_j$$

ou de

$$\sum_{i \neq j} [(b_i^2 + \sigma_i^2)^{1/2} (b_j^2 + \sigma_j^2)^{1/2} - b_i b_j]$$

d'où le résultat.

### ANNEXE 3

$VaR_t(\alpha) - VaR_t^e(\alpha)$  est du signe de

$$(c^2 + e'\sigma^2)^{1/2} - \left[ \sum_{i=1}^n (b_i^2 + \sigma_i^2) \right]^{1/2}$$

ou de  $c^2 - \sum_{i=1}^n b_i^2$

### ANNEXE 4

On a :

$$(\Sigma + bb')^{-1} = \Sigma^{-1} - \frac{\Sigma^{-1}bb'\Sigma^{-1}}{1 + b'\Sigma^{-1}b}$$

et donc :

$$\begin{aligned} b'(\Sigma + bb')^{-1} &= b'\Sigma^{-1} - \frac{b'\Sigma^{-1}bb'\Sigma^{-1}}{1 + b'\Sigma^{-1}b} \\ &= \frac{b'\Sigma^{-1}}{1 + b'\Sigma^{-1}b} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \hat{F}_t &= b'(\Sigma + bb')^{-1}(\Pi_t - a) \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \frac{\pi_{it} - a_i}{\sigma_i^2} / \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{\sigma_i^2} \right) \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}V(F_t - \hat{F}_t) &= V(F_t) - V(\hat{F}_t) \\&= 1 - b'(\Sigma + bb')^{-1}b \\&= 1 - \frac{b'\Sigma^{-1}b}{1 + b'\Sigma^{-1}b} \\&= \frac{1}{1 + b'\Sigma^{-1}b} \\&= 1/(1 + \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{\sigma_i^2})\end{aligned}$$

FIGURE 1: Facteur de Risque Commun (Trait plein)  
Reconstitution (Pointilles)

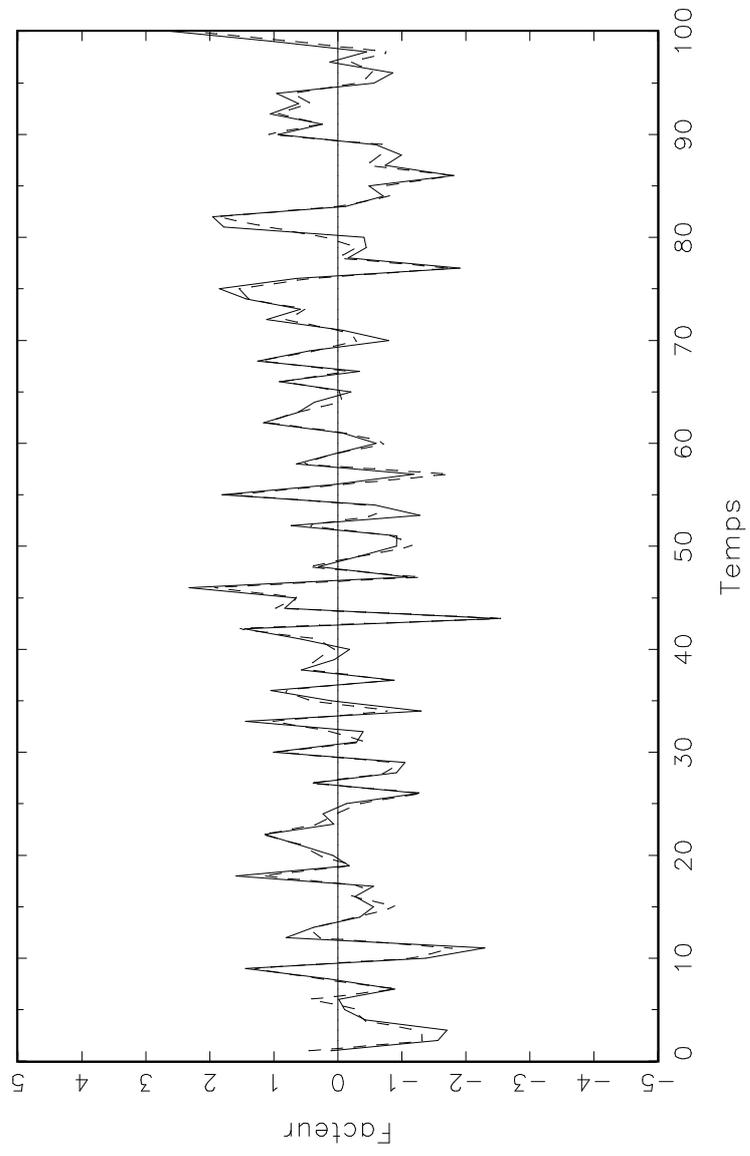


FIGURE 2: Perte et VaR(Traits Pleins) ,  
Perte attendue(Pointilles) ,  
VaR sans Correlation Instantanee(Pointilles longs)

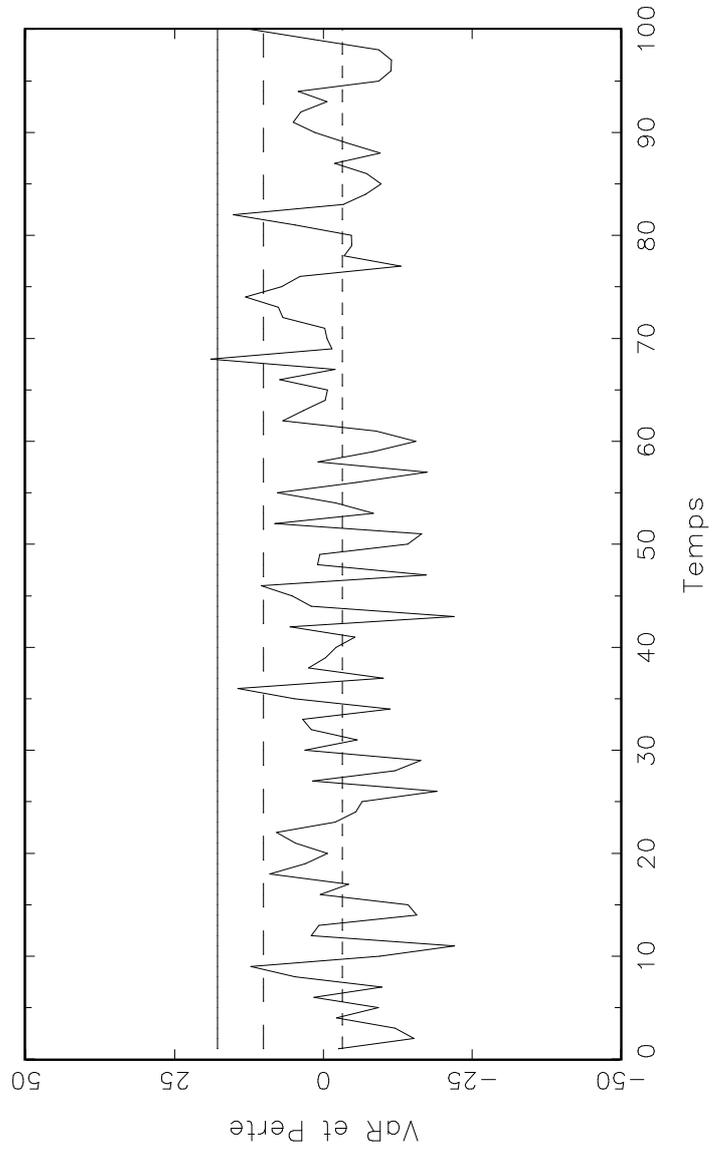


FIGURE 3: Facteur de Risque Commun (Trait plein)  
Filtrage (Pointilles), Prevision en  $t-1$ (Pointilles longs)

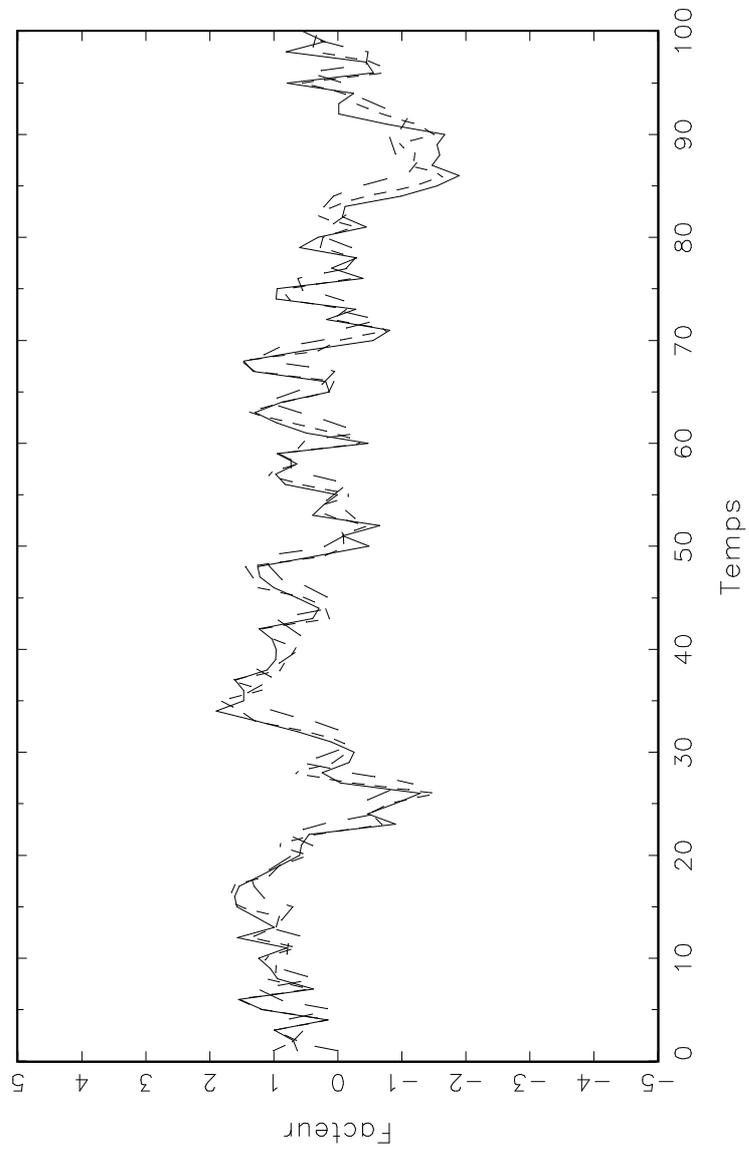


Figure 4: Perte(Trait plein) et Prevision(Pointilles)

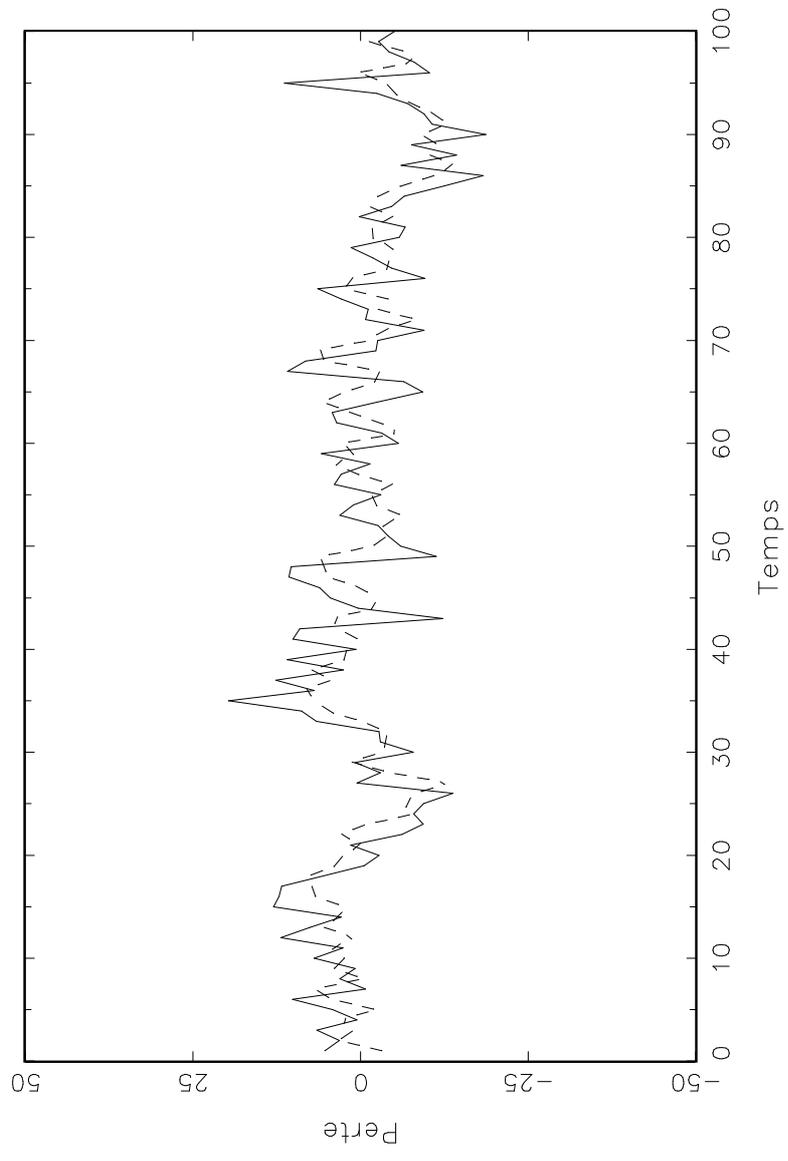


FIGURE 5: Perte et VaR(Traits Pleins) ,  
 Perte attendue(Pointilles),VaR sans Corr Temporelle(Pointilles longs)  
 VaR sans Corr Temporelle et Instantanees(Points et tirets)

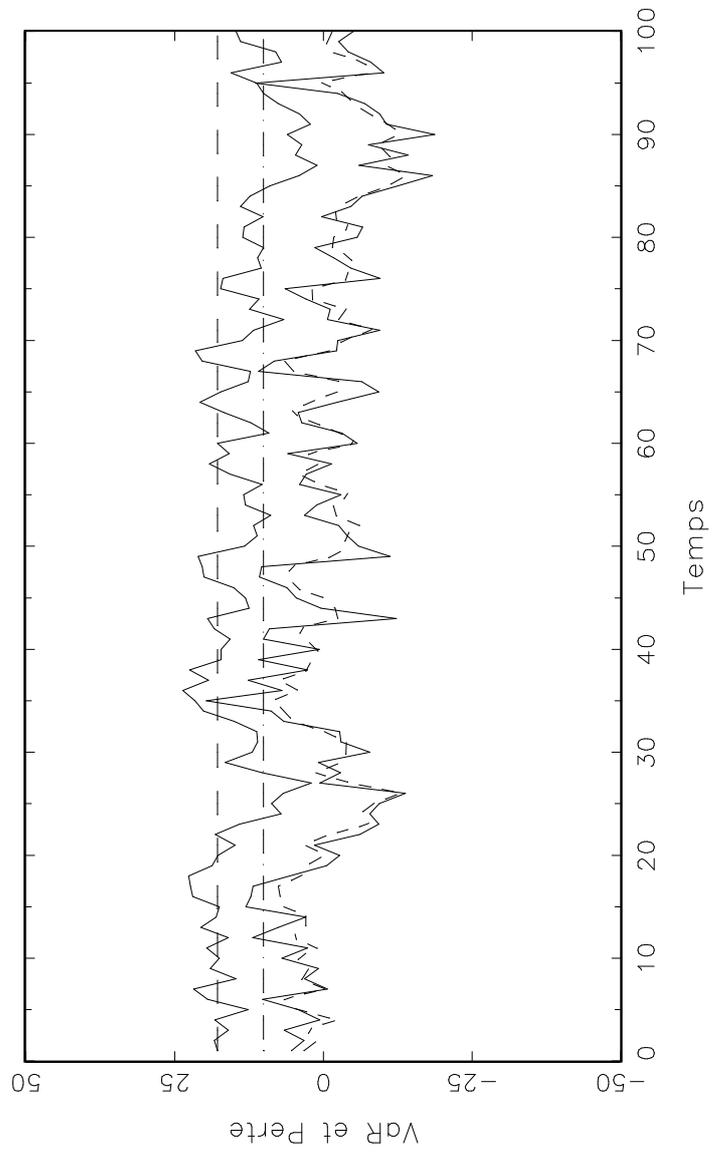


FIGURE 6: Facteur de Risque Commun (Trait plein)  
Filtrage (Pointilles), Prevision en  $t-1$ (Pointilles longs)

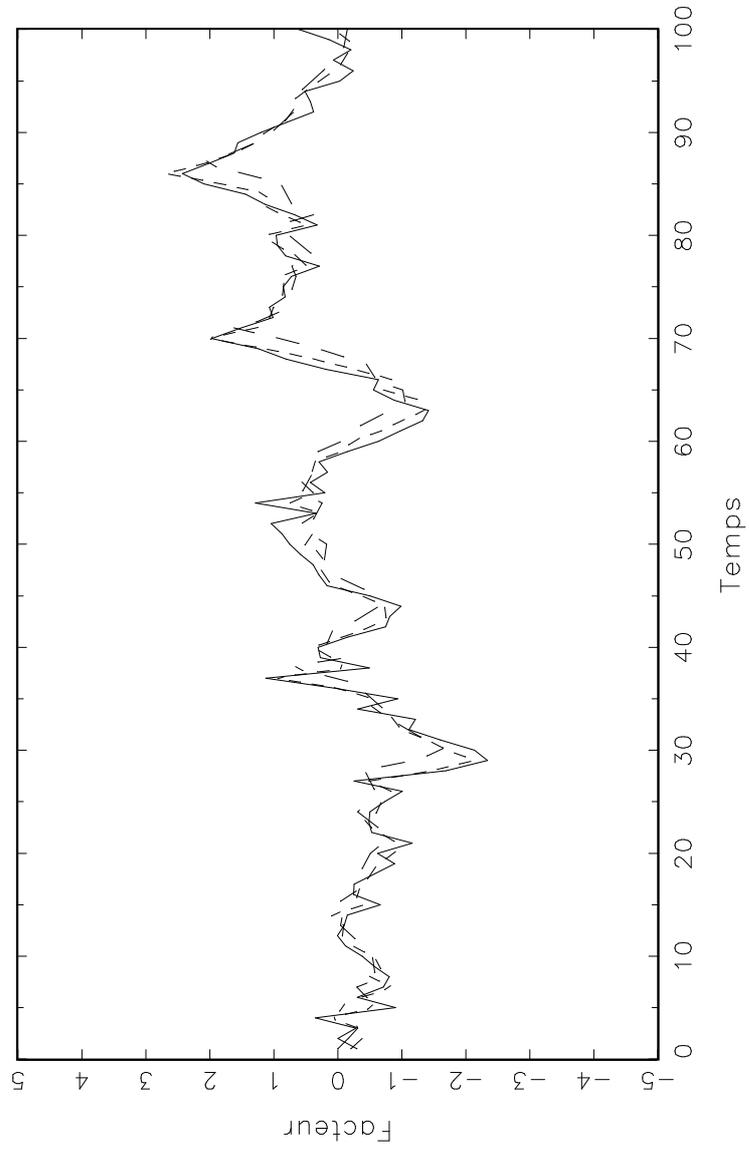


Figure 7: Perte(Trait plein) et Prevision(Pointilles)

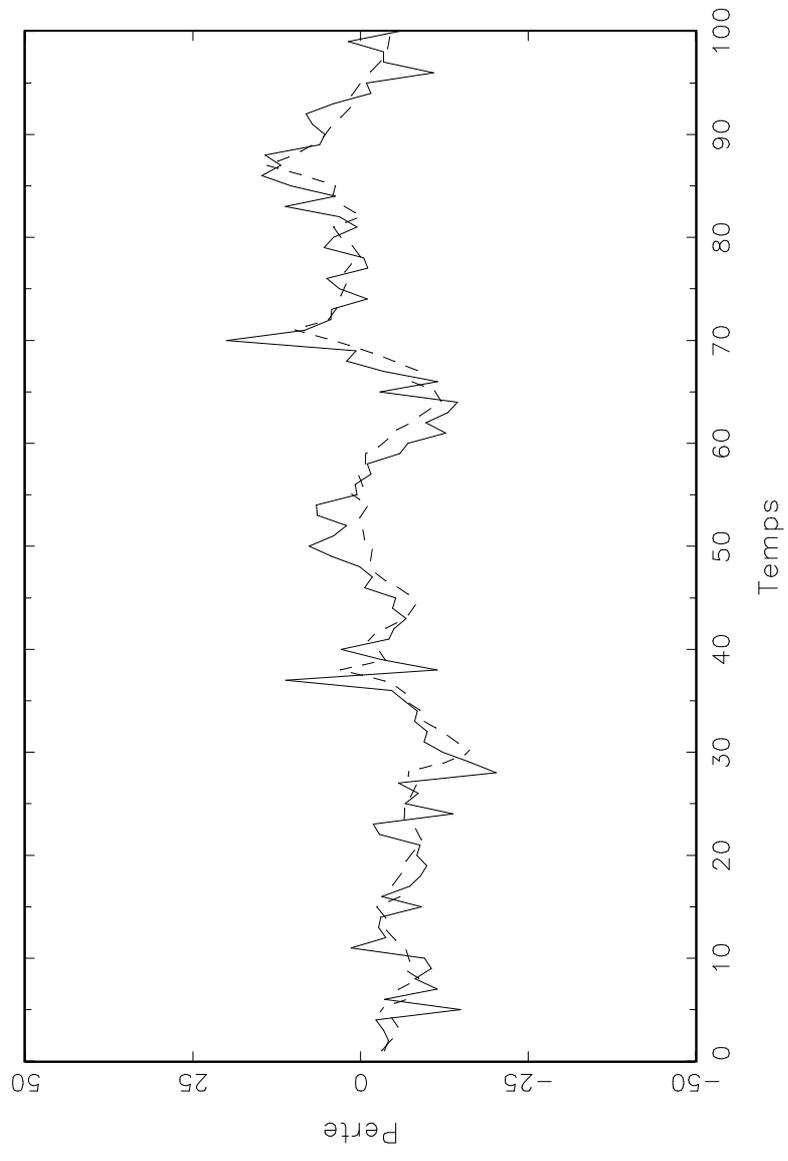
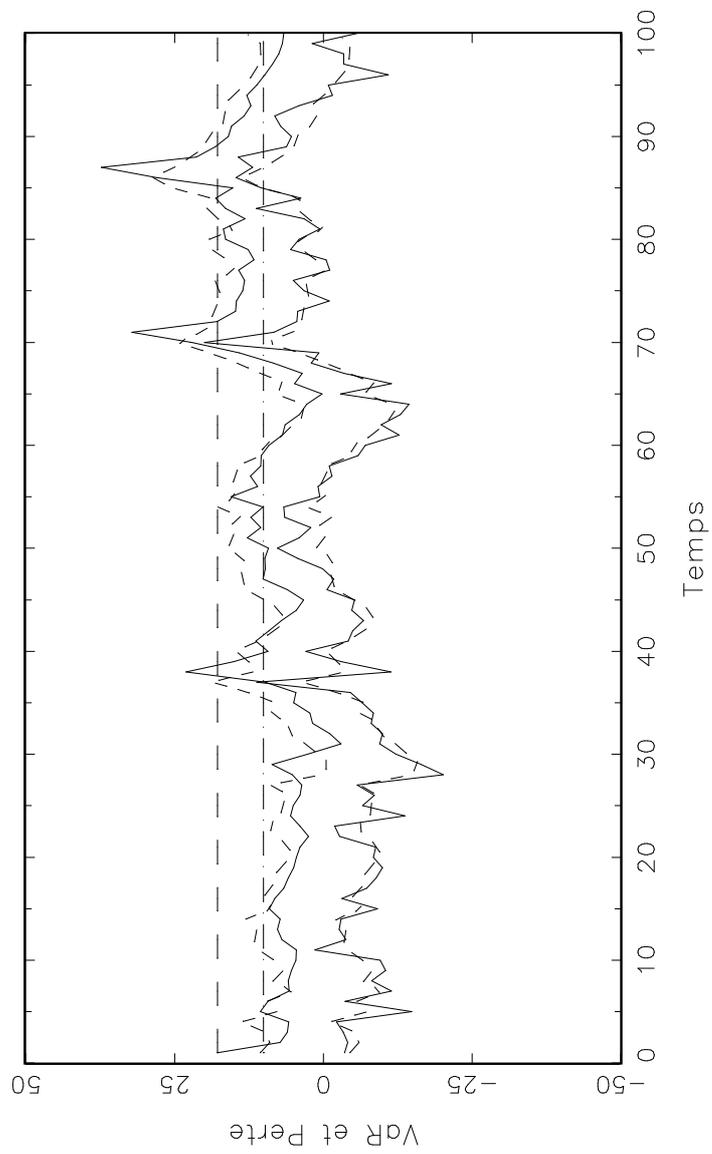


FIGURE 8: Perte et VaR(Traits Pleins) ,  
 Perte attendue(Pointilles),VaR1(Pointilles longs),VaR2(Pointes et tirets)  
 VaR3(Pointilles)



## Documents de Travail

229. Ph. Aghion, Ph. Askenazy, R. Brouilès, G. Cette and N. Dromel, “Education, Market Rigidities and Growth,” January 2009
230. G. Cette and M. de Jong, “The Rocky Ride of Break-even-inflation rates,” January 2009
231. E. Gautier and H. Le Bihan, “Time-varying ( $S,s$ ) band models: empirical properties and interpretation,” January 2009
232. K. Barhoumi, O. Darné and L. Ferrara, “Are disaggregate data useful for factor analysis in forecasting French GDP ?” February 2009
233. R. Cooper, H. Kempf and D. Peled, “Monetary rules and the spillover of regional fiscal policies in a federation” February 2009
234. C. Jardet, A. Monfort, and F. Pegoraro, “No-arbitrage Near-Cointegrated VAR(p) Term Structure Models, Term Premia and GDP Growth” June 2009
235. C. Jardet, A. Monfort, and F. Pegoraro, “New Information Response Functions,” June 2009
236. S. Adjemian, C. Cahn, A. Devulder et N. Maggiar, « Variantes en Univers Incertain », Juin 2009
237. P-A. Chevalier, R. Lecat et N. Oulton, « Convergence de la productivité des entreprises, mondialisation, technologies de l’information et concurrence », Juin 2009
238. S. Avouyi-Dovi, M. Bardos, C. Jardet, L. Kendaoui and J. Moquet, “Macro stress testing with a macroeconomic credit risk model: Application to the French manufacturing sector,” June 2009
239. O. Darné and L. Ferrara, “Identification of slowdowns and accelerations for the euro area economy,” June 2009
240. H. Kempf and G. Rota Graziosi, “Leadership in Public Good Provision: a Timing Game Perspective”, July 2009
241. S. Avouyi-Dovi et J.-G. Sahuc, « Comportement du banquier central en environnement incertain », Juillet 2009
242. J. Coffinet, S. Lin and C. Martin, “Stress testing French banks' income subcomponents,” August 2009
243. P. Fève, J. Matheron and J.-G. Sahuc, “Inflation Target Shocks and Monetary Policy Inertia in the Euro Area”, August 2009
244. P. Fève, J. Matheron et J.-G. Sahuc, « La TVA sociale : bonne ou mauvaise idée? », Août 2009

245. P. Fève, J. Matheron and J.-G. Sahuc, “ Minimum Distance Estimation and Testing of DSGE Models from Structural VARs ”, August 2009
246. P. Fève, J. Matheron et J.-G. Sahuc, « Une estimation de la cible implicite d’inflation dans la zone euro », Août 2009
247. P. Fève, J. Matheron et J.-G. Sahuc, « Désinflation et chômage dans la zone euro : une analyse à l'aide d'un modèle VAR structurel », Août 2009
248. G. Horny , “ Inference in Mixed Proportional Hazard Models with K Random Effects ”, August 2009
249. B. Boockmann, D. Djurdjevic, G. Horny and F. Laisney, “ Bayesian estimation of Cox models with non-nested random effects: an application to the ratification of ILO conventions by developing countries ”, August 2009
250. A. Monfort, « Une modélisation séquentielle de la VaR », Septembre 2009

Pour accéder à la liste complète des Documents de Travail publiés par la Banque de France veuillez consulter le site :

[http://www.banque-france.fr/fr/publications/documents\\_de\\_travail/documents\\_de\\_travail\\_09.htm](http://www.banque-france.fr/fr/publications/documents_de_travail/documents_de_travail_09.htm)

For a complete list of Working Papers published by the Banque de France, please visit the website:

[http://www.banque-france.fr/fr/publications/documents\\_de\\_travail/documents\\_de\\_travail\\_09.htm](http://www.banque-france.fr/fr/publications/documents_de_travail/documents_de_travail_09.htm)

Pour tous commentaires ou demandes sur les Documents de Travail, contacter la bibliothèque de la Direction Générale des Études et des Relations Internationales à l'adresse suivante :

For any comment or enquiries on the Working Papers, contact the library of the Directorate General Economics and International Relations at the following address :

BANQUE DE FRANCE

49- 1404 Labolog

75049 Paris Cedex 01

tél : 0033 (0)1 42 92 49 55 ou 62 65 ou 48 90 ou 69 81

fax :0033 (0)1 42 92 62 92

email : [thierry.demoulin@banque-france.fr](mailto:thierry.demoulin@banque-france.fr)

[jeannine.agoutin@banque-france.fr](mailto:jeannine.agoutin@banque-france.fr)

[veronique.jan-antuoro@banque-france.fr](mailto:veronique.jan-antuoro@banque-france.fr)

[nathalie.bataille-salle@banque-france.f](mailto:nathalie.bataille-salle@banque-france.fr)